इकाई 12 सारणीयन एवं आँकड़ों का आलेखीय निरूपण

संरचना

12.1 प्रस्तावना

12.2 उद्देश्य

12.3 आँकड़ों (दत्तों) का अर्थ

12.4 आँकड़ों की प्रकृत्ति

12.4.1 गुणात्मक तथा संख्यात्मक आँकड़े

12.4.2 सतत तथा विविक्त आँकड़े

12.4.3 प्राथमिक तथा द्वितीयक आँकड़े

12.5 मापन के पैमाने

12.6 सांख्यिकी का अर्थ

12.7 सांख्यिकी की आवश्यकता तथा महत्व

12.8 आँकड़ों के व्यवस्थिकरण का महत्व

12.9 आँकड़ों का अनुक्रमिक प्रस्तुतीकरण

12.10 आँकड़ों का वर्गीकरण तथा सारणीयन

12.11 आँकड़ों का आलेखीय निरूपण

12.12 आँकड़ों के आलेखीय निरूपण के प्रकार

12.12.1 बारम्बारता आयत (हिस्टोग्राम)

12.12.2 दंड चित्र या दंड आलेख

12.12.3 बारम्बारता बहुभुज

12.12.4 संचयी बारम्बारता वक्र

12.13 सारांश

12.14 अभ्यास कार्य

12.15 चर्चा के बिन्दु

12.16 बोध प्रश्नों के उत्तर

12.17 कुछ उपयोगी पुस्तकें

12.1 प्रस्तावना

खंड 2 में आप छात्रों के मूल्यांकन के विषय में पढ़ चुके हैं। छात्रों के मूल्यांकन के लिए हम साधारणतया कक्षा के सभी छात्रों को अनेक परीक्षाएँ देते हैं और उनकी उत्तर-पुस्तिकाओं पर अंक देते हैं। प्रायः इन अंकों की व्याख्या किए बिना इनका प्रयोग किया जाता है। यदि आपको अंकों की व्याख्या करनी है तो उन्हें सार्थक ढंग से सारणीबद्ध करना होगा तथा उनसे विभिन्न सांख्यिकीय गणनाएँ करनी होगी। इस इकाई में आप आँकड़ों के अर्थ और उनकी प्रकृति सांख्यिकी की आवश्यकता और महत्व; सार्थक ढंग से आँकड़ों का सारणीयन तथा आँकड़ों को सरलतापूर्वक समझने के लिए उनके आलेखीय निरूपण के विषय में पढ़ेंगे।

विभिन्न प्रकार के सांख्यक और उनकी गणना करने की विधियों की चर्चा इसी खण्ड की अगली इकाइयों में की गई है।

12.2 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो जाएँगे किः

- आँकड़ों का अर्थ और उसकी प्रकृति स्पष्ट कर सकेंगे;
- चार प्रकार की मापनियों में भेद कर सकेंगे;
- सांख्यिकी का अर्थ, आवश्यकता और महत्व बता सकेंगे;
- आँकड़ों के व्यवस्थापन के महत्व को वर्णन कर सकेंगे;
- कक्षा में प्राप्त आँकड़ों का सार्थक ढंग से सारणीयन कर सकेंगे;
- आलेखीय निरूपण का महत्व स्पष्ट कर सकेंगे;
- कक्षा में प्राप्त आँकड़ों का उपयुक्त आलेखीय निरूपण कर सकेंगे; तथा
- आलेखीय रूप में दिए गए आँकड़ों की व्याख्या कर सकें।

12.3 आँकड़ों (दत्तों) का अर्थ

सम्भवतः आप नियमित रूप से समाचार-पत्र पढ़ते होंगे। अधिकांश समाचार-पत्र पिछले दिन का नगर का न्यूनतम और अधिकतम तापमान देते हैं। ये वर्षा का लेखा और सूर्योदय एवं सूर्यास्त का समय भी लिखते हैं। आप अपने विद्यालय के बच्चों की उपस्थिति लेते हैं और उसे रजिस्टर में भी लिखते हैं। डाक्टर रोगी को नियमित अन्तराल से अपने शरीर का तापमान लेने और उसे लिखने का परामर्श देते हैं।

यदि आप न्यूनतम और अधिकतम तापमान, या वर्षा या सूर्योदय और सूर्यास्त का समय, या बच्चों की उपस्थिति, या रोगी के शरीर का तापमान समय-समय पर नियमित रूप से लिखते हैं, तो इस लिखित ब्योरे को ही आँकड़े कहते हैं। यहाँ आप नगर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान के आँकड़े, वर्षा से सम्बन्धित आँकड़े, सूर्योदय और सूर्यास्त के समय के आँकड़े और बच्चों की उपस्थिति के आँकड़े लिखते हैं। उदाहरणार्थ, किसी विद्यालय के छात्रों की कक्षानुसार उपस्थिति तालिका 12.1 में नीचे दी गई हैः

तालिका 12.1ः कक्षानुसार छात्रों की उपस्थिति

कक्षा	उपस्थित छात्रों की संख्या
VI	42
VII	40
VIII	41
IX	35
X	36
XI	32
XII	30
	कुलः 256

तालिका 12.1 में कक्षानुसार छात्रों की उपस्थिति के आँकड़े दिए गए हैं। ये आँकड़े केवल सात प्रेक्षणों पर आधारित हैं। यह प्रेक्षण कक्षा VI, VII और इसी प्रकार आगे कक्षा XII तक के छात्रों की उपस्थिति के सम्बन्ध में हैं। अतः आँकड़ों का सम्बन्ध, विचाराधीन, प्रेक्षणों मूल्यों, तत्वों या वस्तुओं से होता है।

सभी तत्वों या वस्तुओं के सम्पूर्ण समुच्चय को 'समष्टि' कहा जाता है। प्रत्येक तत्व को आँकड़ों का 'अंग' कहा जाता है।

आँकड़ों का आशय उन सभी ज्ञात तथ्यों या वस्तुओं से भी है जिनके आधार पर भावी निष्कर्ष निकाला जाता है या तथ्यों, सूचनाओं तथा सामग्री जिसको प्रक्रिया से गुजारना या संकलित करना होता है, को समझा जाता है।

12.4 आँकड़ों की प्रकृति

आँकड़ों की प्रकृति को समझने के लिए आवश्यक है कि इनके विभिन्न रूपों का अध्ययन किया जाए। ये निम्न प्रकार के हैं:

- गुणात्मक तथा संख्यात्मक आँकड़े
- सतत तथा विविक्त आँकड़े
- प्राथमिक तथा द्वितीयक आँकड़े

12.4.1 गुणात्मक तथा संख्यात्मक आँकड़े

आइए, हम तालिका 12.2 में दिए आँकड़ों पर विचार करें।

तालिका 12.2: प्रबंधन के अनुसार विद्यालयों की संख्या

प्रबंधन	विद्यालयों की संख्या
राजकीय	4
स्थानीय निकाय	8
निज़ी अनुदान प्राप्त	10
निज़ी गैर अनुदान प्राप्त	2
	कुल : 24

तालिका 12.2 में प्रबंधन के अनुसार विद्यालयों की संख्या दी गई है। इसलिए विद्यालयों को चार वर्गों में बाँटा गया है। ये हैं राजकीय विद्यालय, स्थानीय निकाय के विद्यालय, निज़ी अनुदान प्राप्त विद्यालय और निज़ी गैर अनुदान प्राप्त विद्यालय। कोई विद्यालय इनमें से किसी वर्ग का हो सकता है। इस प्रकार के आँकड़ों को कोटिगत या गुणात्मक आँकड़े कहा जाता है। यहाँ विद्यालय वर्गीकरण का आधार या गुण विद्यालय प्रबंधन व्यवस्था है। इस प्रकार कोटिगत या गुणात्मक आँकड़े प्राप्त जानकारी, जिसे वर्गीकृत किया जाता है के आधार पर प्राप्त किए गए हैं। ऐसे वर्गों को वर्णमाला या बारम्बारता के घटते क्रम में या किसी परम्परागत विधि से लिखा जाता है। प्रत्येक आँकड़ा स्पष्टतः किसी एक वर्ग में होता है।

हमें अक्सर विद्यालयों के बालक, बालिका और सह-शिक्षा विद्यालयों, अनुसूचित जाति, अनुसूचित जन-जाति, व अन्य पिछड़ी जाति वर्ग के लोग और विभिन्न व्यवसायों में लगे लोगों की संख्या आदि के रूप में वर्गीकृत आँकड़े प्राप्त होते हैं।

आइए, तालिका 12.3 में दिए हुए आँकड़ों पर विचार करें।

तालिका 12.3:नामांकन के अनुसार विद्यालयों की संख्या

नामांकन	विद्यालयों की संख्या
50 तक	6
51-100	15
101-200	12
201-300	8
300 से अधिक	4
	कुल : 45

तालिका 12.3 में विद्यालयों की संख्या, छात्रों के नामांकन के अनुसार दी गई है। जिन विद्यालयों में छात्रों की संख्या एक विशिष्ट वर्ग अंतराल में आती है, उन्हें एक समूह में कर दिया गया है, उदाहरणार्थ ऐसे विद्यालय 15 हैं जहाँ छात्रों की संख्या 51 और 100 के बीच है। क्योंकि समूहीकरण का आधार विद्यालयों छात्र संख्या है, इसलिए ये आँकड़े अंकात्मक या संख्यात्मक कहलाते हैं। इस प्रकार संख्यात्मक आँकड़े गणना या मापन का परिणाम होते हैं। हम प्रायः संख्यात्मक आँकड़े समाचार-पत्रों, विज्ञापनों आदि में, नगरों के तापमान, क्रिकेट की औसत आय तथा व्यय आदि के रूप में देखते हैं।

12.4.2 सतत और विविक्त आँकड़े

संख्यात्मक आँकड़े सतत और विविक्त दोनों प्रकार के हो सकते हैं। यह मापे गए तत्वों या वस्तुओं पर निर्भर करता है।

आइए, तालिका 12.4 पर विचार करें जिसमें कक्षा के छात्रों की लम्बाई का ब्यौरा दिया गया है।

तालिका 12.4: एक कक्षा में छात्रों की ऊँचाइयाँ

लम्बाई	छात्रों की संख्या
4'.8" – 4'.10"	2
4'.10"– 5'.0"	2
5'.0" – 5'.2"	5
5'.2" – 5'.4"	8
5'.4" – 5'.6"	12
5'.6" – 5'.8"	10
5'.8" – 5'.10"	2
	कुल: 41

तालिका 12.4 में एक कक्षा के छात्रों की ऊँचाईयाँ दी गई हैं। यहाँ मापी गई विशेषता छात्रों की ऊँचाई है। ऊँचाई 4'.8" से 5'.10" के बीच है। एक व्यक्ति की ऊँचाई 4'.8" से 5'.10" के बीच कुछ भी हो सकती है। दो छात्रों की ऊँचाई का अन्तर शून्य इंच हो सकता है। यदि हम दो अति निकटवर्ती बिन्दु लें, मान लीजिए 4'.8.00" और 4'.8.01" ले तो भी इन दो बिन्दुओं के बीच कई

मूल्य हो सकते हैं। ऐसे आँकड़े सतत आँकड़े कहलाते हैं क्योंकि लम्बाई निरन्तर या सतत है। सतत आँकड़े निरन्तर या सतत गुणों की माप से बनते हैं जिनमें एक दूसरे के बीच का अन्तर शून्य के समीप हो सकता है। बच्चों का भार और ऊँचाई, शरीर का तापमान बुद्धि, तथा छात्रों की उपलब्धि का स्तर आदि सतत आँकड़ों के उदाहरण हैं।

आइए, तालिका 12.3 को एक बार फिर देखें, जिसमें छात्रों की संख्या और नामांकन के अनुसार विद्यालयों की संख्या दिखाई गई है। दो विद्यालय में छात्रों का नामांकन 60 और 61 मान लेते हैं। स्पष्टतः 60 और 61 के बीच कोई नामांकन संख्या नहीं हो सकती क्योंकि नामांकन संख्या पूर्णांक में ही होगी। इस प्रकार 60 और 61 में एक इकाई का अन्तराल है। ऐसे आँकड़े जहाँ प्रेक्षण किए गए तथ्यों में अन्तराल है असतत आँकड़े कहलाते हैं।

विविक्त आँकड़ों की विशेषता होती है कि उनमें अन्तराल होता है जिसमें कोई वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं किया जा सकता। ऐसे आँकड़े सामान्यतः पूर्णांकों में निरूपित किए जाते हैं। परिवार का आकार, कक्षा में बच्चों का नामांकन, पुस्तकों की संख्या आदि विविक्त आँकड़ों के उदाहरण हैं। सामान्यतः माप पर आधारित आँकड़े सतत होते हैं जबकि गणना या यादृच्छिक यावर्गीकरण पर आधारित आँकड़े विविक्त आँकड़े कहलाते हैं।

छात्रों की उपलब्धि के प्राप्तांक यद्यपि असतत आँकड़ों के रूप में प्रस्तुत किए जाते हैं परन्तु उन्हें सतत आँकड़े समझना चाहिए क्योंकि अंक 24 बिन्दुओं 23.5 और 24.5 के मध्य कही भी हो सकता है। वास्तव में उपलब्धि एक सतत चर या गुण होता है।

सभी सतत माप लगभग अनुमानित होते हैं इसलिए ये सतत और विविक्त आँकड़ों में भेद करने का आधार नहीं बन सकते है। भेद मापे गए चर के आधार पर किया जाता है। लम्बाई सतत चर है और बच्चों की संख्या विविक्त चर है।

12.4.3 प्राथमिक और द्वितीयक आँकड़े

वे आँकड़े जो अनुसंधानकर्त्ता द्वारा स्वयं या उसके प्रतिनिधि द्वारा शोध के उद्देश्य के लिए एकत्र किए जाते हैं उन्हें प्राथमिक आँकड़े कहा जाता है। उदाहरणार्थ, बच्चों की उपस्थिति और आप द्वारा ली गई परीक्षा के अंक प्राथमिक आँकड़े कहलाते हैं। यदि आप बच्चों के अभिभावकों से सम्पर्क करते हैं और उनसे उनकी शैक्षिक योग्यता के विषय में पूछते हैं जिससे आप बच्चों की उपलब्धि का सम्बन्ध ज्ञात कर सकें, तो ये आँकड़े प्राथमिक आँकड़े होगें। वास्तव में जब कोई व्यक्ति स्वयं किसी घटना के बारे में आँकड़े या जानकारी किसी निश्चित उद्देश्य से किसी निश्चित योजना के अनुसार एकत्र करता है तो आँकड़े प्राथमिक आँकड़े कहे जाते हैं।

कभी कभी कोई अनुसंधानकर्त्ता आपके द्वारा एकत्र किए गए आँकड़े जैसे बच्चों की विद्यालय उपस्थिति या छात्रों की विभिन्न विषयों में उपलब्धि आदि अपने शोध कार्य में प्रयोग करता है तो उसके लिए ये आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं। जब आँकड़ों का प्रयोग उन्हें एकत्र करने वाले व्यक्ति के अतिरिक्त किसी अन्य व्यक्ति द्वारा किया जाता है तो वे आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं। अनेक कारणों से द्वितीयक आँकड़ों का प्रयोग करना पड़ता है। ऐसी दशा में शोधकर्त्ता को सावधानी का प्रयोग करना चाहिए क्योंकि हो सकता है कि आँकड़े किसी अन्य उद्देश्य से एकत्र किए गए हों या उनमें कुछ तथ्य अपूर्ण या असंगत हों। द्वितीयक आँकड़ों को प्रयोग करने के लिए निम्न बातों का जानना लाभदायक होगाः

(क) आँकड़े किस प्रकार एकत्र किए गए तथा किस प्रक्रिया से गुजरे।

(ख) आँकड़ों की शुद्धता।

(ग) आँकड़ों का किस सीमा तक संक्षेपण किया गया।

(घ) आँकड़े अन्य सारणीयन की तुलना में कैसे हैं, तथा

(च) आँकड़ों की व्याख्या कैसे की जाए विशेषतः यदि आँकड़े एक उद्देश्य से एकत्र किए गए और उनका प्रयोग किसी अन्य उद्देश्य से किया जा रहा हो।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1. निम्नलिखित ऑकड़ों को गुणात्मक तथा संख्यात्मक ऑकड़ों में वर्गीकृत कीजिए।

(i) विद्यालय के छात्रों की कक्षानुसार उपस्थिति।

....

....

....

....

....

(ii) एक विद्यालय की कक्षा VI के छात्रों के गणित के प्राप्तांक।

....

....

....

2. निम्नलिखित ऑकड़ों को सतत तथा विविक्त ऑकड़ों में वर्गीकृत कीजिए।

(i) किसी विद्यालय के छात्रों की आयु

....

....

....

(ii) शब्दों के वर्णविन्यास पर दिए गए परीक्षण के प्राप्तांक।

....

....

....

3. निम्नलिखित ऑकड़ों को प्राथमिक और द्वितीयक ऑकड़ों में वर्गीकृत कीजिए।

(i) शिक्षाशास्त्रियों द्वारा जनगणना के ऑकड़ों का प्रयोग।

....

....

....

(ii) आपके विद्यालय में मापी गई छात्रों की ऊँचाई।

....

....

12.5 मापन के पैमाने

माप का अभिप्राय स्वीकार्य तथा तर्कसंगत नियमों के अनुसार वस्तुओं और घटनाओं को समंक देना है। अंकों की बहुत-सी विशेषताएँ हैं जैसे - पहचान, क्रम और योगात्मकता। यदि हम न्यायसंगत ढंग से वस्तुओं और घटनाओं की व्याख्या करने के लिए उन्हें समंक देते हैं तो समंकों की विशेषताएँ वस्तुओं और घटनाओं पर भी लागू होती है। हमें विभिन्न मापन पैमानों को जानना आवश्यक है, क्योंकि विशेषताओं की संख्या लागू होना मापन के पैमाने पर निर्भर होता है।

आइए, एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों की चार विभिन्न परिस्थितियाँ देखें:

— उन्हें बेतरतीब रूप से 1 से 30 तक क्रम संख्या दी गई है।

— छात्रों को एक पंक्ति में ऊँचाई/लम्बाई के अनुसार खड़े होने को कहा जाना और उन्हें अपनी-अपनी स्थिति के अनुसार 1 से 30 तक क्रमसंख्या दिया जाना।

— सभी छात्रों को 50 अंक की एक परीक्षा में 0 से 50 तक अंक उनकी उपलब्धि के अनुसार दिया जाना।

— सभी छात्रों की ऊँचाई/लम्बाई और भार की माप करना और व्यक्तिगत विवरण तैयार किया जाना।

प्रथम अवस्था में क्रमसंख्या पूर्णतया स्वेच्छा से दी गई है। किसी भी छात्र को क्रमांक 1 दिया जा सकता था और किसी को भी क्रमांक 30 दिया जा सकता था। किन्हीं दो छात्रों की किसी भी आधार पर दिए गए क्रमों के अनुसार तुलना नहीं की जा सकती। सभी छात्रों को 1 से 30 तक की क्रम संख्या उनकी पहचान के लिए दी गई है। यह मापनी **नामित** मापनी या पैमाना कहलाती है। यहाँ पहचान की विशेषता तो लागू होती है परन्तु क्रम और योगात्मक विशेषताएँ लागू नहीं होतीं।

दूसरी अवस्था में छात्रों को पंक्ति में ऊँचाई के अनुसार अपने-अपने स्थान के लिए 1 से 30 तक क्रमसंख्या दी गई है। यहाँ क्रमसंख्या का आधार स्वेच्छा नहीं है। यहाँ छात्रों को लम्बाई के क्रम में क्रमसंख्या दी गई है। इसलिए छात्रों की तुलना लम्बाई के आधार पर की जा सकती है क्योंकि इस सम्बन्ध में यहाँ एक क्रम है। प्रत्येक छात्र ऊँचाई में स्वयं से पहले छात्र की तुलना में अधिक या कम ऊँचा है। यह मापनी **क्रमवाचक/क्रमसूचक** मापनी कहलाती है। यहाँ वस्तु की अपनी पहचान भी है और क्रम संख्या भी। चूँकि दो छात्रों की ऊँचाई का अन्तर ज्ञात नहीं है, इसलिए योगात्मक विशेषता क्रमवाचक मापनी में लागू नहीं होती है।

तीसरी अवस्था में छात्रों को एक उपलब्धि परीक्षण के आधार पर 0 से 50 समंक दिए गए हैं। तीन छात्रों के द्वारा प्राप्त समंकों पर विचार कीजिए जो कि क्रमशः 30, 20 और 40 हैं। यहाँ हम इस प्रकार व्याख्या कर सकते हैं कि प्रथम और द्वितीय छात्रों के समंकों में अन्तर, प्रथम और तृतीय छात्रों के प्राप्तांकों में अन्तर के समान है। फिर भी, कोई यह नहीं कह सकता कि तृतीय छात्र के प्राप्तांक द्वितीय छात्र के प्राप्तांकों से दुगने हैं। ऐसा इसलिए है कि 0 अंक पाने वाले छात्र के लिए यह नहीं कहा जा सकता कि उसकी उपलब्धि शून्य है। इसे **अन्तराल** मापनी कहा जाता है। यहाँ पहचान, क्रम और योगात्मक विशेषताएँ लागू होती है।

चौथी अवस्था में सभी छात्रों के लम्बाई और भार के सही मान उपलब्ध है। यहाँ सभी मूल्य हर प्रकार से तुलना योग्य है। यदि दो छात्रों की लम्बाई क्रमशः 120 सेमी. और 140 सेमी. है तो उनकी लम्बाई का अंतर 20 सेमी. है और उनकी लम्बाइयों का अनुपात 6 : 7 है। इस मापनी को **अनुपात** (Ratio) मापनी कहा जाता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

4. निम्नलिखित उदाहरणों में चार मापनियों में से कौन-सी मापनी का प्रयोग किया गया है, उल्लेख कीजिए।

(i) आप के विद्यालय के छात्रों की आयु।

....

....

(ii) कक्षा के छात्रों को दिए गए रोल नम्बर।

....

....

(iii) बोर्ड की परीक्षा में आपके विद्यालय की कक्षा X के छात्रों के क्रमांक।

....

....

(iv) कक्षा VIII के छात्रों के इतिहास में प्राप्त अंक

....

....

....

12.6 सांख्यिकी का अर्थ

सांख्यिकी का अर्थ समझने के लिए नीचे कुछ परिभाषाएँ दी गई हैं:

(क) सांख्यिकी के निष्कर्ष निकालने के लिए, वर्गीकरण व व्यवस्थापन के विज्ञान के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

(ख) सांख्यिकी का अभिप्राय उस विधि से है जिसके द्वारा आँकड़ों का संकलन, प्रस्तुतीकरण, तथा विश्लेषण, किसी विशेष उपयोगिता के लिए किया जाता है।

(ग) सांख्यिकी वह वैज्ञानिक विधि है जिसके द्वारा आँकड़ों का संकलन, व्यवस्थापन, संक्षेपण, प्रस्तुतीकरण और विश्लेषण करके वैध निष्कर्ष निकाले जा सकें और इस प्रकार के विश्लेषण के आधार पर तर्कसंगत निर्णय लिए जा सकें। इसका सम्बन्ध आँकड़ों के आयोजित संकलन तथा विवेचन से है। आँकड़ों का यह आयोजित संकलन सांख्यिकी को दूसरी प्रकार की सूचनाओं से अलग करता है।

(घ) सांख्यिकी वह विज्ञान है जिसकी सहायता से आँकड़ों से लाभकारी जानकारी प्राप्त की जा सके। यह केवल आँकड़ों के संकलन और प्रस्तुतीकरण तक सीमित नहीं है बल्कि आँकड़ों का विवेचन तथा उनसे निष्कर्ष निकालना भी इसमें शामिल है।

सांख्यिकी शब्द एक वचन और बहुवचन दोनों ही प्रकार से प्रयोग होता है। एक वचन के रूप में यह वह विज्ञान है जिसका सम्बन्ध आँकड़ों के संकलन, प्रस्तुतीकरण और उनसे निष्कर्ष

निकालने से है। बहुवचन के रूप में इसका अर्थ है किसी निश्चित उद्देश्य से एकत्र किए गए संख्यात्मक तथ्य। सांख्यिकीय आँकड़े गुणात्मक न होकर संख्यात्मक होते हैं।

12.7 सांख्यिकी की आवश्यकता और महत्व

एक विद्वान व्यक्ति अपने क्षेत्र का साहित्य पढ़ना चाहता है। यहाँ तक कि अध्यापक को भी बहुत पढ़ना पड़ता है। साहित्य का अध्ययन करते समय उसके समक्ष सांख्यिकी के संकेत, संकल्पनाएँ और विचार आते हैं। अध्ययन करने वाले को सांख्यिकी के अध्ययन से अपने निजी विचार बनाने या तथ्यों से निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है, और उसे लेखक के निष्कर्षों को स्वीकार करने की आवश्यकता नहीं होती। अध्यापक होने के नाते आप अपने छात्रों के व्यवहार और उपलब्धि स्तर की जाँच के लिए अनेक परीक्षाएँ लेते हैं और अनेक उपकरण प्रयोग करते हैं। साधारण सांख्यिकीय विधियों से समंकों की व्याख्या और अधिक सार्थक हो जाती है। यदि अध्यापक अनुसंधान कार्य को समझने में रूचि रखता है तो उसे सांख्यिकीय विधियों में अधिक दक्षता की आवश्यकता होती है।

गणित और सांख्यिकी की भाषा द्वारा सर्वाधिक शुद्ध और सही वर्णन करना सम्भव होता है। ये विषय हमें अपनी चिन्तन तथा कार्य प्रणाली में निश्चित व परिशुद्ध होने के लिए बाध्य करते हैं। सांख्यिकी हमें अपने परिणामों को अर्थपूर्ण और सुविधाजनक ढंग से संक्षिप्त करने में सहायक होती है। ये हमें सामान्य रूप से स्वीकृत नियमों के अनुसार निष्कर्ष निकालने में सहायता करते हैं और हमें बताते हैं कि इन पर हम कितना निर्भर कर सकते हैं। सांख्यिकी हमें ज्ञात परिस्थितियों के आगे होने वाली घटनाओं की भविष्यकथन करने के योग्य बनाती है। यह हमें जटिल घटनाओं के सामान्य कारकों का विश्लेषण करने के भी योग्य बनाती है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

5. ऐसी दो परिस्थितियाँ लिखे जिनमें सांख्यिकी लाभकारी होती है।

....

....

....

....

....

12.8 आँकड़ों के व्यवस्थिकरण का महत्व

जब आँकड़ों के समुच्चय में कुछ ही प्रविष्टियाँ होती है तो प्रेक्षणों का साधारण लेखा ही आँकड़ों का विवेचन करने के लिए पर्याप्त होता है। परन्तु प्रायः हमारे विद्यालयों में कक्षाओं में छात्रों की संख्या अधिक होती है इसलिए प्रेक्षणों को लिखना आँकड़ों के विवेचन के लिए पर्याप्त नहीं होता, यदि पूरी कक्षा के आँकड़े हों। यहाँ आँकड़े प्रायः समूहों में व्यवस्थित किए जाते हैं जिन्हें वर्ग कहा जाता है और आँकड़े तालिका के रूप में दिए होते है जिसमें प्रत्येक वर्ग की बारम्बारता दी होती है। इस प्रकार तालिका में दिए गए आँकड़ों का अधिक अच्छा दृश्य प्रस्तुत करती हैं और शीघ्रता से आँकड़ों की विशेषताओं का मूल्यांकन करने में सहायक होती हैं।

12.9 आँकड़ों का आनुक्रमिक प्रस्तुतीकरण

आँकड़ों को व्यवस्थित करने का सबसे सरल ढंग है उन्हें किसी क्रम में प्रस्तुत किया जाना। यहाँ तक कि यदि कुछ ही प्रविष्टियाँ हो तो भी उन्हें क्रम में प्रस्तुत करने से सरलता से समझा जा सकता है और उनकी व्याख्या की जा सकती है। उदाहरणार्थ, आइए नीचे दी गई 15 बच्चों की ऊँचाइयों पर विचार करें:

लम्बाई (सेमी. में): 142, 156, 139, 148, 150, 149, 148, 144, 150, 152, 148, 149, 147, 141 और 145

इन संख्याओं द्वारा बच्चों की लम्बाई के सम्बन्ध में कुछ भी नहीं कहा जा सकता। यदि आप प्रयास भी करें तो इन्हें किसी न किसी प्रकार पुनः व्यवस्थित करना पड़ेगा। उदाहरण के लिए, आप जानना चाहेंगे कि इन संख्याओं में न्यूनतम और अधिकतम कौन-कौन सी है, या यह जानना चाहेंगे कि सर्वाधिक बारंबारता किस संख्या की है।

अब इन लम्बाईयों को कम लम्बाई से अधिक लम्बाई के क्रम में लिखें।

लम्बाई (सेमी. में): 139, 141, 142, 144, 145, 147, 148, 148, 148, 149, 149, 150, 150, 152 और 156

अब एक नज़र में देखकर कहा जा सकता है कि बच्चों की लम्बाई 139 सेमी. से 156 सेमी. तक विचरित करती है; तीन बच्चों की लम्बाई 148 सेमी. है, और 148 सेमी. के कम और 148 सेमी. से अधिक लम्बाई वाले बच्चों की संख्या समान है। इसी प्रकार एक विशेष ऊँचाई तक के बच्चों की संख्या तुरन्त बताई जा सकती है।

आँकड़े दो प्रकार से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। एक तो बढ़ते क्रम में जिसे आरोही क्रम कहा जाता है और दूसरे घटते क्रम में जिसे अवरोही क्रम कहा जाता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

6. नीचे 20 छात्रों के अंग्रेज़ी भाषा के समक दिए गए हैं। इन्हें आरोही क्रम में लिखिये और निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

 65, 49, 39, 57, 70, 49, 33, 72, 61, 42, 38, 66, 75, 57, 45, 59, 60, 47, 55 और 68

 (i) कितने छात्रों ने 60 या इससे अधिक अंक प्राप्त किए हैं?

 ....

 ....

 (ii) कितने छात्रों के अंक 50 से कम हैं?

 ....

 ....

 (iii) अधिकतम प्राप्तांक क्या है?

 ....

12.10 आँकड़ों का वर्गीकरण तथा सारणीयन

यदि आँकड़े बहुत अधिक हों तो बिना वर्गीकरण किए उनका अध्ययन तथा विवेचना करना बहुत कठिन कार्य होगा चाहें उन्हें क्रमबद्ध भी कर लिया जाए। इसलिए साधारणतया आँकड़ों के समूह बना लिए जाते हैं जिन्हें वर्ग अंतराल कहते हैं तथा इन्हें तालिका के रूप में निरूपित किया जाता है जिसमें प्रत्येक समूह के सामने उसकी बारम्बारता दी जाती है। इस प्रकार की बारम्बारता तालिका में आँकड़ों का अधिक अच्छा दृश्य प्रस्तुत करती है इससे कोई भी व्यक्ति इसे सरलता से पढ़ सकता है और आँकड़ों की विशेषताओं को समझ सकता है।

उदाहरणार्थ, 40 छात्रों की एक कक्षा में 50 समंक की एक परीक्षा ली गई और उनके द्वारा प्राप्त समंक नीचे तालिका 12.5 में दिए गए हैं:

तालिका 12.5

35, 40, 22, 32, 41, 18, 20, 40, 36, 29, 24, 28, 28, 31

39, 37, 27, 29, 40, 35, 38, 30, 45, 26, 20, 25, 32,

31, 42, 28, 33, 32, 29, 26, 48, 32, 16, 46, 18, 44

तालिका 12.5 में दिए हुए 40 छात्रों के समंकों को देखकर आप कह सकते हैं कि समंक 16 से 48 तक फैले हुए हैं परन्तु आप समंकों से समस्त उपलब्धि के बारे में और कुछ जानना चाहें तो कठिन होगा।

आइए, अब इन्हीं समंकों को तालिका 12.6 में व्यवस्थित कर के उन पर विचार करें:

तालिका 12.6

अंक	छात्रों की संख्या
45 - 49	3
40 - 44	6
35 - 39	6
30 - 34	8
25 - 29	10
20 - 24	4
15 - 19	3
	कुल: 40

तालिका 12.6 में समंकों के बंटन को देखने से पता चलता है कि 10 छात्रों के अंक 25 से 29 के बीच हैं और केवल 7 छात्रों के अंक 50 प्रतिशत से कम आए हैं। नीचे इस तालिका से सम्बन्धित विभिन्न पदों की चर्चा की गई है।

तालिका 12.6 में अंक अवरोही क्रम में व्यवस्थित किए गए हैं और प्रत्येक वर्ग की बारम्बारता दी गई है। ऐसी तालिका बारम्बारता बंटन कहलाती है। एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन में न्यूनतम दो स्तम्भ होते हैं - पहले स्तम्भ में वर्गों की व्यवस्था किसी सार्थक ढंग से की गई है, और दूसरे स्तम्भ में सम्बन्धित बारम्बारता दी गई हैं। वर्गों को वर्ग अंतराल भी कहा जाता है। प्रत्येक वर्ग अंतराल में समंकों या मूल्यों का विस्तार समान होता है। दिए गए उदाहरण में सबसे पहला वर्ग अंतराल 45 - 49 है जिसका विस्तार 5 अंक है अर्थात्, 45, 46, 47, 48 और 49

है। यहाँ वर्ग अंतराल की निचली सीमा 45 और ऊपरी सीमा 49 है। जैसा कि पहले ही कहा जा चुका है, अंक 45, 44.5 से 45.5 तक कहीं भी हो सकती है। इसलिए वर्ग अंतराल की वास्तविक निचली सीमा 45 की बजाय 44.5 और वास्तविक ऊपरी सीमा 49 की बजाय 49.5 है। वर्ग अंतराल का परास 49.5 - 44.5 = 5, अर्थात् वास्तविक ऊपरी सीमा और वास्तविक निचली सीमा का अन्तर परास या वर्ग विस्तार होता है।

वर्गीकृत आँकड़ों को बारम्बारता बंटन के रूप में प्रस्तुत करने के लिए कई सोपानों का अनुसरण करना पड़ता है। ये सोपान निम्नलिखित हैं:

1. गैर-अतिव्यापी वर्गों का चयन
2. प्रत्येक वर्ग में आने वाले मूल्यों की गणना
3. तालिका का निर्माण

आइए, तालिका 12.7 में दिए गए कक्षा X के 120 छात्रों के गणित में प्राप्त समंकों पर विचार करें।

तालिका 12.7: कक्षा X के 120 छात्रों के गणित में प्राप्त समंक

71, 85, 41, 88, 98, 45, 75, 66, 81, 38, 52, 67, 92, 62, 83, 49,
64, 52, 90, 61, 58, 63, 91, 57, 48, 67, 75, 89, 73, 64, 80,
67, 76, 65, 76, 65, 61, 68, 84, 72, 57, 77, 63, 52, 56, 41,
60, 55, 75, 53, 45, 37, 91, 57, 40, 73, 66, 76, 52, 88, 62,
78, 68, 55, 67, 39, 65, 44, 47, 58, 68, 42, 90, 89, 39, 69,
48, 82, 91, 39, 85, 44, 71, 48, 56, 48, 90, 44, 62, 47, 83,
80, 96, 69, 88, 74, 44, 38, 74, 93, 39, 72, 56, 46, 71, 80,
46, 54, 77, 58, 81, 70, 58, 51, 78, 64, 84, 50, 95, 87, 59

सर्वप्रथम हमें वर्ग अंतरालों की संख्या के बारे में निर्णय लेना है। हम साधारणतया समान विस्तार के 6 से 20 तक वर्ग अंतराल बनाते हैं। यदि समंक या घटनाएँ अधिक होती हैं तो हम साधारणतया 10 से 20 तक वर्ग अंतराल बनाते हैं। जब समंक या मूल्य बहुत अधिक नहीं होते तो 10 वर्ग अंतराल पर्याप्त समझे जाते हैं। वर्ग अंतरालों की संख्या ज्ञात करने के लिए हमें समंकों का विस्तार या परास ज्ञात होना चाहिए। तालिका 12.7 में समंकों का विस्तार 37 से 98 तक है, इसलिए परास 62 हुआ (98.5 - 36.5 = 62)।

एक वर्ग का विस्तार 2, 3, 5, 10 और 20 लिया जाता है। यदि एक वर्ग का विस्तार यहाँ 10 है तो वर्गों की संख्या 62 ÷ 10 = 6.2 अर्थात् 7 है जो कि वांछनीय संख्या से कम है। यदि वर्ग विस्तार 5 ले तो वर्गान्तरों की संख्या 62 ÷ 5 = 12.2 अर्थात् 13 होगी जो अब वांछनीय है।

अब प्रश्न उठता है किं प्रथम वर्ग कहाँ से आरम्भ करें? अधिकतम समंक 98 तीनों वर्ग अंतरालों अर्थात् 94-98, 95-99 और 96-100, जिनका वर्ग अंतराल 5 है, में शामिल है। हम वर्गान्तर 95-99 को चुनते हैं क्योंकि समंक 95, 5 का गुणक है। इसलिए यहाँ 13 वर्ग अंतराल 95-99, 90-94, 85-89, 80-94, ..., 35-39 होगें। इसके दो लाभ हैं; पहला यह कि वर्गों के मध्य बिन्दु पूर्णांक होगे जिनका आपको कभी कभी प्रयोग करना होगा। दूसरे, यह कि जब हम 5 के अंतराल के वर्गांन्तर से प्रारम्भ करते हैं तो मिलान चिह्न लगाना सरल होगा। जब वर्ग विस्तार 5 होता है तो हम वर्गों को 0, 5, 10, 15, 20 आदि से आरम्भ करते हैं।

इन लाभों को जानने के लिए आप अन्य वर्ग अंतराल का प्रयोग कर सकते हैं जैसे 94-98, 89 - 93, 84-88, 79-83 आदि। यहाँ आप मिलान चिह्न लगाने में कठिनाई अनुभव करेंगे आप वर्ग आकार 4 भी ले सकते हैं। तब आप अनुभव करेंगे कि मध्य-बिन्दु पूर्णांक नहीं हैं। इसलिए, वर्गान्तर का विस्तार तथा निचली और ऊपरी सीमाओं का चयन करते समय आप को सावधानी रखनी होगी।

13 वर्ग अंतरालों को अवरोही क्रम में लिखने और प्रत्येक समंक से सम्बन्धित मिलान-रेखा उचित वर्गान्तर में लगाने के बाद हमें तालिका 12.8 के अनुसार बारम्बारता बंटन प्राप्त होगा।

तालिका 12.8: कक्षा X के 120 छात्रों के गणित के समंकों का बारम्बारता बंटन

समंक	मिलान चिह्न	छात्रों की संख्या
95 - 99	III	3
90 - 94	~~IIII~~ III	8
85 - 89	~~IIII~~ III	8
80 - 84	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
75 - 79	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
70 - 74	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
65 - 69	~~IIII~~ ~~IIII~~ IIII	14
60 - 64	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
55 - 59	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
50 - 54	~~IIII~~ III	8
45 - 49	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
40 - 44	~~IIII~~ III	8
35 - 39	~~IIII~~ II	7
		कुलः 120

वर्ग अंतराल लिखने की विधि

सबसे ऊपर पहला वर्ग अंतराल लिखेंगे 95 - 99। इसके बाद इसकी दोनों सीमाओं में से 5 घटा कर वर्ग अंतराल प्राप्त करेंगे और उसे वर्गान्तराल 95-99 के नीचे लिखेंगे। इसी प्रकार अगला वर्ग अंतराल 85 - 89 लिखेंगे। यह प्रक्रिया उस समय तक चलेगी जब तक हम उस वर्ग अंतराल को नहीं लिख लेते जिसमें सबसे छोटा (कम) समंक आता है।

मिलान चिह्न लगाने की प्रक्रिया

सबसे पहले प्रथम पक्ति में प्रथम समंक 71 को लें। समंक 71 वर्ग अंतराल 70 - 74 में (70, 71, 72, 73, 74) आता है इसलिए मिलान चिह्न (I) वर्ग अंतराल 70 - 74 के सामने लगाते हैं। प्रथम पक्ति का दूसरा समंक 85 है जो वर्ग अंतराल 85 - 89 (85, 86, 87, 88, 89) में आता है, इसलिए हम वर्ग अंतराल 85 - 89 के सामने मिलान चिह्न लगाते हैं। इसी प्रकार सभी 120 अंकों के सम्बन्धित मिलान चिह्न लगाते हैं। मिलान चिह्न लगाते समय अपनी उंगली सम्बन्धित समंक पर रखिए अन्यथा सारी प्रक्रिया बेकार हो जायेगी। कुल मिलान चिह्न 120 होने चाहिए जो कुल समंकों के बराबर है। जब किसी वर्ग अंतराल में 4 मिलान चिह्न हो जाए तो पाँचवा मिलान चिह्न इस प्रकार (~~IIII~~) लगाइए। इस प्रकार मिलान चिह्न लगाते समय पाँच-पाँच के समूह बन जाते हैं। मिलान चिह्नों को गिन कर प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारम्बारता उसके सामने लिखिए। इस प्रकार तालिका तैयार हो जाएगी।

तालिका 12.8 में वर्ग अंतराल 95 - 99 की वास्तविक सीमाएँ 94.5 और 99.5 है। समंक 95 का विस्तार 94.5 से 95.5 तक और अंक 99 का विस्तार 98.5 और 99.5 तक होता है इस प्रकार इस वर्ग अंतराल का विस्तार 94.5 से 99.5 तक होगा। जैसा पहले बताया जा चुका है, आँकड़ों का सतत होना चर की प्रकृति पर निर्भर है। वर्ग अंतरालों को आम तौर पर अवरोही क्रम में लिखा जाता है, किन्तु इन्हें आरोही क्रम में भी लिखा जा सकता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

7. एक कक्षा के 40 छात्रों के हिन्दी में 50 समंकों में से प्राप्त समंक नीचे दिए गए हैं:

25, 32, 18, 40, 31, 22, 26, 37, 29, 42, 35, 15, 24

17, 29, 36, 34, 26, 20, 38, 41, 27, 35, 21, 32, 22,

29, 37, 21, 25, 31, 28, 34, 23, 26, 30, 33, 24, 29, 32

(i) आप वर्ग अंतराल का आकार क्या लेंगे? क्यों?

....

....

....

(ii) आप प्रथम वर्ग अंतराल कहाँ से प्रारम्भ करेंगे?

....

(iii) दिए गए आँकड़ों की तालिका बनाइए। बारम्बारताओं को जोड़ कर देखिए कि योग 40 है या नहीं। यदि आप ने कोई अशुद्धि की है तो सोचिए कि क्या सावधानी प्रयोग में लानी चाहिए थी और दोबारा बनाइए। (स्वयं चेष्टा करें)

....

....

....

12.11 आँकड़ों का आलेखीय निरूपण

जो आँकड़े तालिका के रूप में दिए गए हैं उन्हें आलेखीय चित्रात्मक रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है। एक भली भाँति बनाया गया आलेख आँकड़ों को प्रस्तुत करने का सबसे सरल ढंग है।

12.12 आँकड़ों के आलेखीय निरूपण के प्रकार

यहाँ हमने आँकड़ों को प्रस्तुत करने के मानक आलेखीय ढंगों की ही चर्चा की है; जिन्हें नीचे सूची में दिया है:

- बारम्बारता आयत (हिस्टोग्राम)

- दण्ड चित्र या दण्ड आलेख (ग्राफ)
- बारम्बारता बहुभुज
- संचयी बारम्बारता वक्र (ओजाइव)

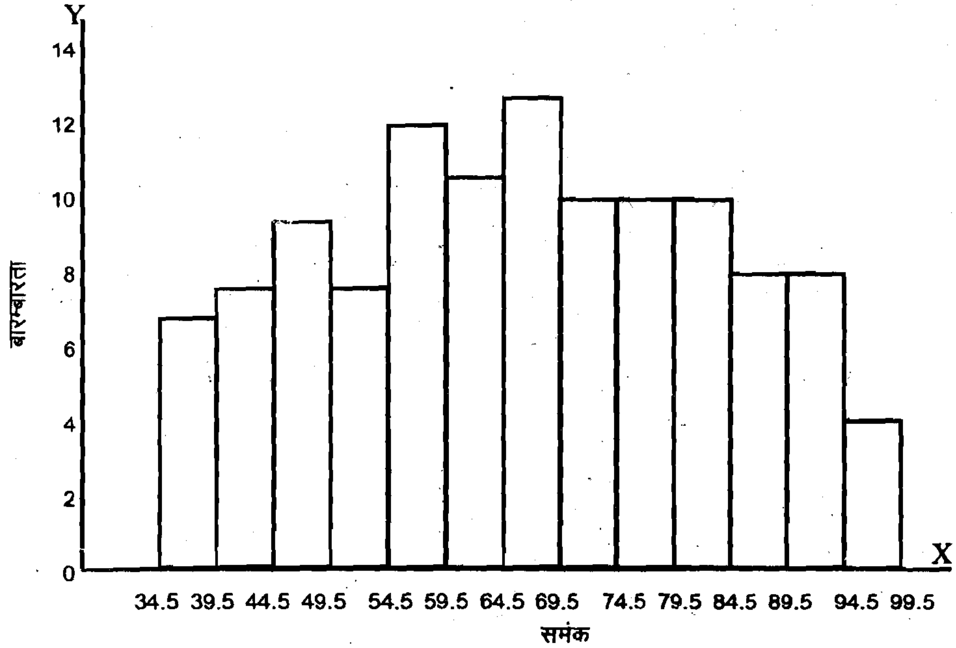
12.12.1 बारम्बारता आयत् (हिस्टोग्राम)

बारम्बारता आयत (हिस्टोग्राम) आँकड़ों के आलेखीय निरूपण की सबसे अधिक प्रचलित विधि चित्र है। बारम्बारता आयत बनाने के लिए एक ग्राफ़ पेपर ले लिया जाता है। चर के मूल्यों को क्षितिज रेखा जिसे X-अक्ष कहते हैं और बारम्बारता उर्द्धाधर रेखा जिसे Y-अक्ष कहते हैं पर लिखते हैं। प्रत्येक वर्ग अंतराल पर आयत बनाई जाती है जिसका आधार वर्गान्तर की चौड़ाई के समान होता है और ऊँचाई वर्ग अंतराल की बारम्बारता के समानुपाती होती है। जब सभी वर्ग अंतराल की चौड़ाई समान होती है, जैसा कि आप को विद्यालयी परिस्थितियों में देखने और करने के लिए मिलता है तो आयतों की ऊँचाई बारम्बारता के अनुपात में होती है। यदि वर्ग अंतराल समान न हों तो आयतों का क्षेत्रफल बारम्बारताओं के समानुपाती होता है क्योंकि चरों के वर्ग अंतराल सतत होते हैं इसलिए आयतों के आधार भी एक सीमा से दूसरी सीमा तक सतत होते हैं। यह सीमाएँ X-अक्ष अर्थात् क्षितिज रेखा पर दिखाई जाती हैं। आयत की ऊँचाई जो बारम्बारता के प्रदर्शित करती है Y-अक्ष पर दिखाई जाती है।

आइए, तालिका 12.8 में दिए गए कक्षा X के 120 छात्रों के गणित के समंक के बारम्बारता बंटन के आधार पर बारम्बारता आयत (हिस्टोग्राम) बनाएँ।

इसके लिए ग्राफ़ पेपर के Y-अक्ष पर वर्ग अंतराल की सीमाएँ अंकित करते हैं और यह कार्य सबसे छोटे वर्ग अंतराल अर्थात् 34.5 - 39.5 से आरम्भ करते हैं। इस प्रकार X-अक्ष पर बिन्दु 34.5, 39.5, 44.5, 49.5, ... 99.5 आदि लिखते हैं। इसी प्रकार से Y-अक्ष पर बारम्बारता 1 से 14 तक अंकित करते हैं। आलेखीय प्रस्तुतीकरण की ऊँचाई उसकी चौड़ाई की 60 से 75 प्रतिशत होनी चाहिए। हम X-अक्ष पर 1 सेमी. में 5 समंक और Y-अक्ष पर 1 सेमी. में 2 बारम्बारताऐं अंकित करते हैं। पहली आयत बनाने के लिए आधार 34.5 - 39.5 और बारम्बारता 7 लेते हैं और आयत बनाते हैं। दूसरी आयत के लिए आधार 39.5 - 44.5 पर ऊँचाई के लिए बारम्बारता 8 लेते हैं, और इसी प्रकार आगे कार्य पूरा करते हैं।

बारम्बारता आयत (हिस्टोग्राम)चित्र 12.1 में दिखाया गया है:



चित्र 12.1: गणित के समंकों का बंटन

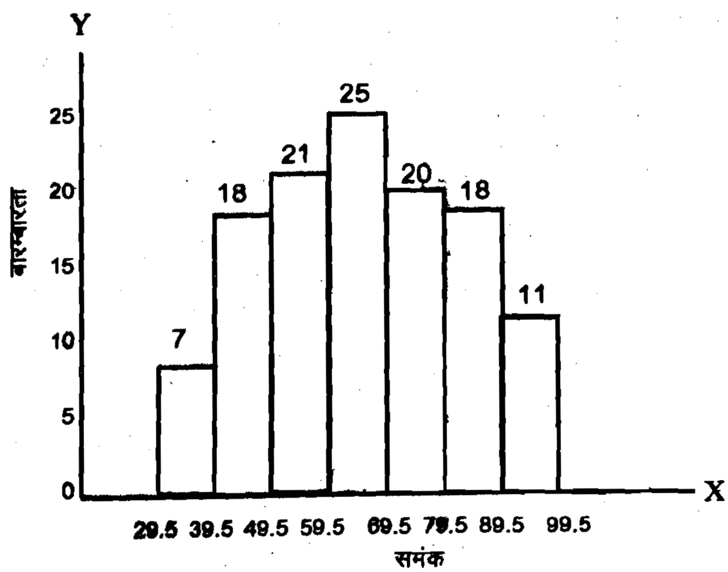
आइए, तालिका 12.8 में दिए गए आँकड़ों को दोबारा 10 समंकों का अन्तराल लेकर वर्गीकृत करें। नया वर्गीकरण तालिका 12.9 में दिखाया गया है।

तालिका 12.9: गणित के समंकों का बारम्बारता बंटन

समंक	बारम्बारता
90 - 99	11
80 - 89	18
70 - 79	20
60 - 69	25
50 - 59	21
40 - 49	18
30 . 39	7
	कुल: 120

बारम्बारता आयत बनाने के लिए X-अक्ष पर वर्ग अंतराल की सीमाएँ पहले की तरह निश्चित कर लेते हैं। सीमाओं के बिन्दु 29.5, 39.5, 49.5, ... 99.5 होंगे। Y-अक्ष पर बारम्बारताएं 1 से 25 तक अंकित कर लेते हैं। X-अक्ष पर एक सेमी. दूरी 10 समंक प्रदर्शित करती है, तथा Y-अक्ष पर एक सेमी. दूरी 5 बारम्बारता दर्शाती है।

बारम्बारता आयत चित्र 12.2 में दिखाया गया है:



चित्र 12.2: गणित के समंकों का बंटन

यदि हम चित्र 12.1 और 12.2 को ध्यान से देखे तो पता चलेगा कि चित्र 12.2 चित्र 12.1 से सरल है। चित्र 12.1 एक जटिल चित्र है क्योंकि उसमें वर्ग अंतराल की संख्या अधिक हैं।

यदि हम वर्ग अंतरालों की संख्या और बढ़ाएँ तो चित्र और भी अधिक जटिल हो जाएगा। इसलिए हम दिए गए आँकड़ों का बारम्बारता आयत बनाने के लिए सामान्यतः वर्ग अंतरालों की कम संख्या ही पसन्द करते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

8. तालिका 12.7 में दिए गए आँकड़ों में वर्ग अंतराल का आकार 4 मानकर पुनः तालिका बनाइए। उपर्युक्त विवरण के आधार पर बारम्बारता आयत बनाइए। चित्र 12.1 और 12.2 के बारम्बारता आयतों की तुलना कीजिए।

....

....

....

9. बारम्बारता आयत बनाने में पाई गई कठिनाइयों की सूची बनाइए।

....

....

....

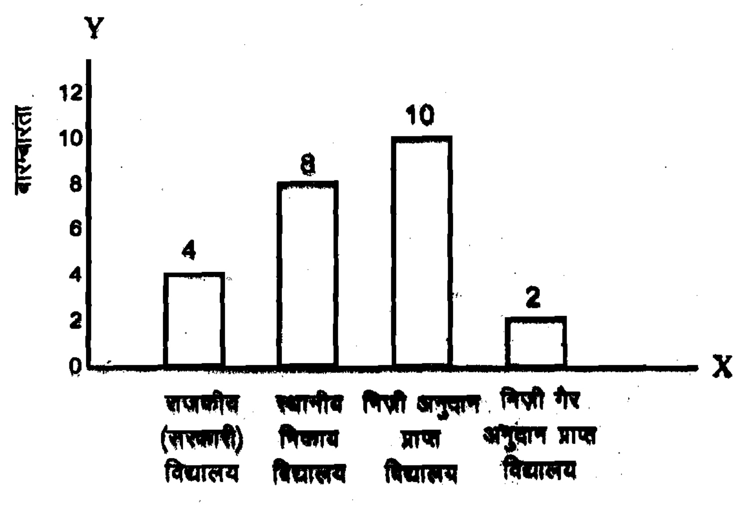
....

12.12.2 दंड चित्र या दंड आलेख

अगर चर असतत प्रवृत्ति के हैं तो बारम्बारता आयत नहीं बनाया जा सकता क्योंकि वर्गों का विस्तार तुलनीय नहीं होता है। फिर भी बारम्बारता आयत से मिलता जुलता एक साधारण आदेश जिसे दंड चित्र कहते हैं, बनाया जा सकता है। एक नगर विशेष में विद्यालयों की संख्या 24 है और प्रबन्ध की दृष्टि से विद्यालयों की बंटन तालिका 12.2 में दर्शाई गई है।

प्रबन्धन	विद्यालयों की संख्या
राजकीय (सरकारी)	4
स्थानीय निकाय	8
निज़ी अनुदान प्राप्त	10
निज़ी गैर अनुदान प्राप्त	2
	कुल : 24

दंड चित्र, चित्र 12.3 में दिया गया है।



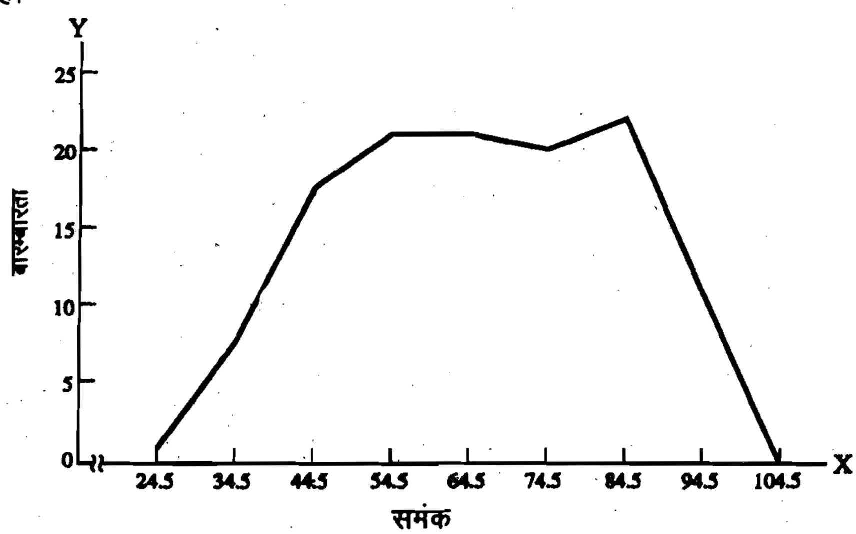
चित्र 12.3: एक नगर में प्रबंधन अनुसार विद्यालयों का बंटन

एक असतत चर के लिए X-अक्ष पर मापन की इकाई महत्वपूर्ण नहीं है। वर्ग भी एक दूसरे से सम्बधित नहीं हैं। इसलिए दंड X-अक्ष पर एक दूसरे से समान दूरी पर और समान चौड़ाई के होते हैं। परन्तु दंडों की ऊँचाई क्रमशः बारम्बारता के अनुपात में होती है। दंड आलेख प्रायः असतत आँकड़ों के चित्रात्मक प्रस्तुतीकरण के लिए प्रयोग किए जाते हैं। यदि एक साथ दो चरों का प्रयोग किया जाए तब भी दंड ग्राफ़ प्रभावशाली होते हैं। उदाहरणार्थ, (प्रबन्ध के अनुसार) विद्यालयों की संख्या के साथ, बाल विद्यालयों की संख्या, बालिका विद्यालयों की संख्या तथा सह-शिक्षा वाले विद्यालयों की संख्या दर्शानी हो तो यह उसी ग्राफ़ पेपर पर विभिन्न रंगों में दर्शायी जा सकती है। प्रत्येक प्रबन्धन व्यवस्था के चार दंड विभिन्न रंगों में होगें जो विभिन्न वर्गों का निरूपण करेंगे।

12.12.3 बारम्बारता बहुभुज

बारम्बारता आयत की भाँति बारम्बारता बहुभुज बनाने के लिए भी चरों के मूल्य X-अक्ष पर और बारम्बारता ग्राफ़ पेपर के Y-अक्ष पर लिए जाते हैं। बारम्बारता बहुभुज बनाने के लिए वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु लिए जाते हैं और X-अक्ष पर वर्ग अंतराल की सीमाओं के स्थान पर उनके मध्य बिन्दु दिखाए जाते हैं। यहाँ एक-एक मध्य बिन्दु सबसे नीचे वाले अन्तराल से पहले और सबसे ऊपर वाले अन्तराल के बाद भी अंकित करने होते हैं। अब एक-एक मध्य बिन्दु को लेकर उनके ठीक ऊपर सम्बन्धित बारम्बारताएँ दिखाने के लिए बिन्दु अंकित किए जाते हैं। दो अतिरिक्त मध्य बिन्दुओं पर बारम्बारता शून्य होती है इसलिए इन बारम्बारताओं को X-अक्ष पर ही दर्शाया जाता है। अब साथ-साथ अंकित हुए दो-दो बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिलाया जाता है।

आइए तालिका 12.9 में दिए गए गणित के समंकों के बारम्बारता बंटन को एक बार फिर देखें और उसके किए बारम्बारता बहुभुज बनाएँ। वर्ग अतंरालों के मध्य बिन्दु क्रमशः 34.4, 44.5, 54.5, ... 94.5 हैं। दो अतिरिक्त मध्य बिन्दु की 24.5 और 104.5 की भी आवश्यकता है। अब X-अक्ष पर 24.5, 34.5, 44.5, ... 94.5, 104.5, बिन्दु बनाए जैसा चित्र 12.4 में दिखाया गया है।



चित्र 12.4: गणित के समंकों का बारम्बारता बहुभुज

X-अक्ष पर दिए गए बिन्दु लीजिए और क्रमशः ऊँचाई 0, 7, 18, 21, 25, 20, 18, 11 ओर 0 लीजिए और इन बिन्दुओं को दो-दो की जोड़ी में क्रम से मिलाइए। इस प्रकार चित्र संख्या 12.4 में बनाया हुआ बारम्बारता बहुभुज प्राप्त हो जाएगा।

अब चित्र 12.2 और 12.4 की तुलना कीजिए। आप को मालूम होगा कि यदि चित्र 12.2 में वर्ग अंतरालों के आयतों के ऊपर के मध्य बिन्दुओं को मिलाया जाए और प्राप्त वक्र को दोनों ओर 0 बारम्बारता (X-अक्ष) से मिलाएँ तो बारम्बारता बहुभुज प्राप्त हो जाएगा जैसा कि चित्र 12.4 में दिखाया गया है।

बारम्बारता बहुभुज का मूल उद्देश्य बंटन का रूप दिखाना है। जब दो या अधिक बारम्बारता बंटनों की तुलना करनी होती है तो एक ही अक्ष पर सम्बन्धित बारम्बारता बहुभुज बनाए जा सकते हैं। तब यदि दोनों बंटनों में कोई अन्तर होता है तो दिखाई देता है। बारम्बारता बहुभुज में हिस्टोग्राम की अपेक्षा यह एक अतिरिक्त लाभ होता है।

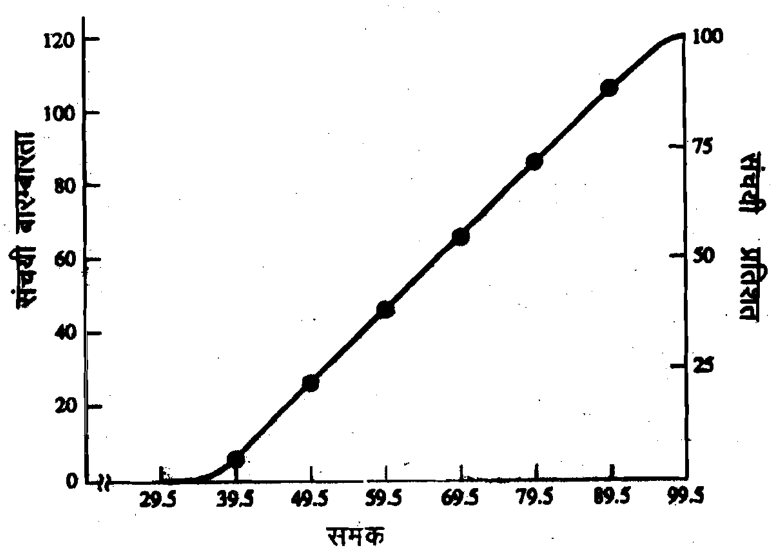
12.12.4 संचयी बारम्बारता वक्र

संचयी बारम्बारता वक्र या ओजाइव बनाने के लिए सर्वप्रथम प्रत्येक वर्ग अंतराल के सामने संचयी बारम्बारता लिख दी जाती है। यदि तालिका 12.9 में दिए गए बारम्बारता बंटन को लिया जाए तो यह तालिका 12.10 जैसी होगी।

तालिका 12.10: समंकों का संचयी बारम्बारता बंटन

समंक	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
30 - 39	7	7
40 - 49	18	25
50 - 59	21	46
60 - 69	25	71
70 - 79	20	91
80 - 89	18	109
90 - 99	11	120

किसी वर्ग अंतराल की संचयी बारम्बारता प्राप्त करने के लिए हम उससे पिछली वर्ग अंतराल की संचयी बारम्बारता लेते हैं और उसमें हम वर्ग अंतराल की बारम्बारता जोड़ देते हैं। यह संचयी बारम्बारता यह बताती हे कि 39.5 तक 7, 48.5 तक 25, 59.5 तक 46 और इसी प्रकार आगे 95.5 तक 120 प्राप्तांक है। बारम्बारता बहुभुज और संचयी बारम्बारता वक्र के बनाने में अन्तर केवल इतना है कि बारम्बारता बहुभुज में वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु लिया जाता है और संचयी बारम्बारता वक्र बनाने के लिए वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा ली जाती है। दोनों ही दशाओं में बिन्दु X-अक्ष पर लिए जाते हैं। इसमें Y-अक्ष पर प्रतिशत संचयी बारम्बारता ली जाती है जबकि बारम्बारता बहुभुज के सम्बन्ध में केवल बारम्बारता ली जाती है। तालिका 12.10 के आधार पर चित्र 12.5 में संचयी बारम्बारता वक्र दिखाया गया है।



चित्र 12.5: संचयी बारम्बारता वक्र

चित्र 12.5 में वक्र 29.5 (शून्य संचयी बारम्बारता) से शुरू होता है और बढ़ते हुए 99.5 (120 संचयी बारम्बारता) तक जाता है। यहाँ हमने बिन्दुओं को उनके क्रम में एक निष्कोण वक्र द्वारा मिलाया है। संचयी बारम्बारता वक्र से हम सरलता से यह ज्ञात कर सकते हैं कि X-अक्ष पर प्राप्ताकों की विशेष संख्या या प्रतिशत किस बिन्दु तक आ जाते हैं। संचयी बारम्बारता वक्र और ओज़ाइव में अन्तर यह है कि संचयी बारम्बारता वक्र में हम Y-अक्ष पर केवल संचयी बारम्बारता लेते हैं जबकि ओज़ाइव में संचयी बारम्बारता का प्रतिशत लेते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दि रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत मे दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

10. ओज़ाइव बनाने के लिए बारम्बारता वर्ग अंतरालो की ऊपरी सीमा के सामने क्यों दी जाती हैं?

....

....

....

....

12.13 सारांश

- आँकड़ों का अभिप्राय विचाराधीन प्रेक्षणों, मूल्यों, तत्वों या पदार्थों से होता है।
- आँकड़े गुणात्मक या संख्यात्मक, सतत या विविक्त, प्राथमिक और द्वितीयक होते हैं। यह तत्वों की प्रकृति पर निर्भर करता है।
- जब तत्वों को वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है तो गुणात्मक आँकड़े प्राप्त होते हैं जबकि संख्या में व्यक्त किए गए तत्व संख्यात्मक आँकड़े प्रदान करती हैं।
- जब अनुसंधानकर्त्ता स्वयं आँकड़े एकत्र करता है और उन्हें प्रयोग करता है तो ये आँकड़े प्राथमिक कहलाते हैं। और जब प्रयुक्त आँकड़े अनुसंधानकर्त्ता द्वारा एकत्र नहीं किए जाते और वह उनका प्रयोग करता है तो वे द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं।
- चार प्रकार की मापनी (या मापन पैमाने) होती हैं। ये हैं - नामित मापनी, क्रमवाचक मापनी, अन्तराल मापनी और अनुपात मापनी। मापों पर प्रयुक्त गणितीय प्रक्रिया इस बात पर निर्भर करती है कि किस मापनी का प्रयोग मापन के लिए किया गया है।
- गैर-अतिव्यापी वर्गों का चयन, प्रत्येक वर्ग में आने वाले मूल्यों की गणना और तालिका बनाना आदि बारम्बारता बंटन बनाने के तीन पद हैं।
- गुणात्मक आँकड़े दंड चित्र या दंड आलेख द्वारा प्रस्तुत किए जा सकते हैं, जबकि संख्यात्मक आँकड़े बारम्बारता आयत, बारम्बारता बहुभुज, या संचयी बारम्बारता वक्र या ओज़ाइव द्वारा प्रस्तुत किए जाते हैं।

12.14 अभ्यास कार्य

1. आँकड़ों के दो समुच्चय एकत्र कीजिए - एक गुणात्मक और दूसरा संख्यात्मक। इन आँकड़ों को तालिका के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

....

....

....

....

2. अपनी कक्षा का एक परीक्षण लीजिए। प्राप्त आँकड़ों को बारम्बारता बंटन के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

....

....

....

....

3. प्रेक्षणों के दोनों समुच्चयों को उपयुक्त रूप में प्रस्तुत कीजिए और परीक्षा परिणामों को आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

....

....

12.15 चर्चा के बिन्दु

1. आपको दैनिक जीवन की परिस्थितियों या समाचार-पत्र में बहुत से आँकड़े देखने को मिलते हैं। आप इन आँकड़ों को अपनी अभ्यास पुस्तिका में उनकी प्रकृति के साथ लिखिए। अपने अध्यापक या निर्देशक से इन आँकड़ों पर चर्चा कीजिए।
2. आप अपनी कक्षा में अनेक परीक्षण लेते हैं। प्रत्येक परीक्षण के आँकड़ों को बारम्बारता बंटन के रूप में वर्गीकृत कीजिए। यदि उस समय आपके समक्ष गैर अतिव्यापी वर्गों के चयन की समस्या आए तो उसकी अपने अध्यापक या निर्देशक से परिचर्चा कीजिए।
3. विभिन्न अन्तराल लेकर किन्हीं दिए गए आँकड़ों से बारम्बारता बंटन बनाइए। सर्वोत्तम वर्गीकरण को पहचानिए और अपने अध्यापक या निर्देशक से इसकी परिचर्चा कीजिए।

12.16 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (i) गुणात्मक आँकड़े (यहाँ उपस्थिति कक्षा अनुसार दी गई हैं इसलिए इन्हें गुणात्मक आँकड़े कहा जाता है। यदि कक्षाएँ उपस्थिति के अनुसार पहचान ली जाती या वर्गीकृत की जाती तो उपस्थिति संख्यात्मक होती)

   (ii) संख्यात्मक आँकड़े

2. (i) सतत आँकड़े

   (ii) सतत आँकड़े (यहाँ प्राप्त समंक पूर्णाक होगे परन्तु वर्तनी योग्यता की प्रकृति सतत होती है।)

3. (i) द्वितीयक आँकड़े

   (ii) प्राथमिक आँकड़े

4. (i) अनुपाती मापनी

   (ii) सांकेतिक मापनी

   (iii) क्रमवाचक मापनी

   (iv) अन्तराल मापनी

5. छात्रों के विभिन्न परीक्षणों के प्राप्त समंकों का निर्वचन (व्याख्या) करना।

   स्वीकृत नियमों के अनुसार छात्रों की उपलब्धि के बारे में सामान्य निष्कर्ष निकालना।

6. (i) 8

   (ii) 8

   (iii) 75

7. (i) समंक 15 से 42 तक फैले हैं इसलिए समंकों का परास हुआ 42.5 - 14.5 = 28 यदि वर्ग विस्तार 3 लिया जाए तो वर्ग अंतराल 10 होगे जोकि उचित हैं।

   (ii) 42 – 44 जो कि 41.5 – 44.5 निरूपित करता है, प्रथम वर्ग अंतराल होगा।

प्रश्न 8 तथा 9 विद्यार्थियों को स्वंय करने है।

10. ओजाइव बनाने के लिए संचयी बारंबारता का उपयोग किया जाता है तथा संचयी बांरबारता में संपूर्ण वर्ग अंतराल की बारंबारताएं सम्मिलित होती है अतः वर्ग अंतराल की अंतिम सीमा तक लेना आवश्यक है।

12.17 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Garrett, H.E. (1956), *Elementary Statistics*, Longmans, Green & Co., New York.

Guilford, J.P. (1965), *Fundamental Statistics in Psychology and Education*, McGraw Hill Book Company, New York.

Hannagan, T.J. (1982), *Mastering Statistics*, The Macmillan Press Ltd., Surrey.

Jaeger, R.M. (1983), *Statistics : A Spectator Sport*, Sage Publications India Pvt. Ltd., New Delhi.

Lindgren, B.W. (1975), *Basic Ideas of Statistics*, Macmillan Publishing Co. Inc., New York.

Walker, H.M. and Lev, J. (1965), *Elementary Statistical Methods*, Oxford & IBH Publishing Co., Calcutta.

Wine, R.L. (1976), *Beginning Statistics*, Winthrop Publishers Inc., Massachusetts.