इकाई 13 केन्द्रीय प्रवृति के माप

संरचना

13.1 प्रस्तावना

13.2 उद्देश्य

13.3 व्यक्तिगत तथा समूह मापन

13.3.1 केन्द्रीय प्रवृति के मापों की अवधारणा

13.3.2 मापन पैमाना तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

13.4 नामित पैमाने पर आधारित आँकड़े तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप: बहुलक

13.4.1 अवर्गीकृत दत्तों का बहुलक

13.4.2 वर्गीकृत दत्तों से बहुलक का परिकलन

13.4.3 शैक्षिक अवस्थितियाँ तथा बहुलक का उपयोग

13.4.4 बहुलक की सीमाएँ

13.5 क्रमसूचक मापनी पर आँकड़े (दत्त) तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति माप: माध्यिका

13.5.1 अवर्गीकृत दत्तों में माध्यिका

13.5.2 वर्गीकृत दत्तों में माध्यिका ज्ञात करना

13.5.3 एक विशेष अवस्था में माध्यिका परिकलन

13.5.4 माध्यिका की व्याख्या

13.5.5 शैक्षिक अवस्थाएं तथा माध्यिका का उपयोग

13.5.6. माध्यिका की सीमाएं

13.6 समान्तराल मापनी (स्केल) पर दत्त तथा केन्द्रीय प्रवृति का माप : माध्य

13.6.1 अवर्गीकृत दत्तों का माध्य ज्ञात करना

13.6.2 वर्गीकृत दत्तों का माध्य ज्ञात करना

13.6.3 माध्य की व्याख्या

13.6.4 शैक्षिक अवस्थाएं तथा माध्य का उपयोग

13.6.5 माध्य की सीमाएँ

13.6.6 संयुक्त माध्य

13.6.7 माध्य, माध्यिका, तथा बहुलक में संबध

13.7 माध्य, माध्यिका तथा बहुलक की तुलना

13.8 उपयुक्त औसत का चयन

13.9 सारांश

13.10 अभ्यास कार्य

13.11 चर्चा के बिन्दु

13.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

13.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

13.1 प्रस्तावना

किसी व्यक्ति या समूह के निष्पादन को निश्चित रूप से समझने के लिए उनकी विभिन्न विशेषताओं व गुणों पर आँकड़े एकत्रित किए जाते हैं। इससे हमें उन व्यक्तियों या समूह को

भली भांति समझने में सहायता मिलती है। इन आकड़ें को मापन पैमानों जैसे नामित, क्रम-सूचक या, समान्तराल पैमानों पर वर्गीकृत किया जा सकता है। इन आकड़ों को एक पैमाने से दूसरे पैमाने में बदला जा सकता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप किसी औसत का निरूपण करता है तथा समग्र समूह के निष्पादन का संक्षिप्त विवरण देता है जिससे कई समूहों की तुलना प्रतिरूपी निष्पादन के पदों में की जा सकें। अतः केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का उपयोग सामान्य रूप से पूरे समूह द्वारा प्राप्त समंकों की व्याख्या करने में प्रयुक्त होता है।

इस इकाई में हम केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों जैसे बहुलक, माध्यिका, व माध्य का विवरण दिया गया है तथा उनके परिकलन की विधि तथा व्याख्या पर भी चर्चा की गई है। इसके अतिरिक्त विभिन्न शैक्षणिक अवस्थाओं, जिनमें इन मापों का उपयोग लाभप्रद हो सकता है, पर चर्चा करने के अतिरिक्त इन मापों की श्रेष्ताओं तथा सीमाओं को भी उजागर करने का प्रयत्न किया गया है।

13.2 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात आप इस योग्य हो जाएँगें कि आप :

- केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापों के अर्थ को स्पष्ट कर सकें।
- वर्गीकृत तथा अवर्गीकृत दोनों प्रकार के दत्तों (डेटा) के संदर्भ मे उन के बहुलकों का परिकलन तथा व्याख्या कर सकें।
- उन अवस्थितियों के उदाहरण दे सकें जिनमें बहुलक एक सार्थक माप समझा जा सकता है।
- बहुलक की सीमाओं को दर्शा सकें।
- अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत दोनों प्रकार के दत्तों के संदर्भ में माध्यिका का परिकलन तथा व्याख्या कर सकें।
- उन अवस्थितियों की सूची बना सकें जहां माध्यिका का प्रयोग सार्थक रूप से हो सकता है।
- माध्यिका की सीमाओं का वर्णन कर सकें।
- अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत दोनों प्रकार के दत्तों के संदर्भ में माध्य की गणना निकाल सकेंगें तथा उस की व्याख्या कर सकें।
- उन अवस्थितियों को बता सकें जहां पर माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का सर्वाधिक उपयुक्त माप है।
- माध्य की सीमाओं का विवेचन कर सकें।
- विभिन्न प्रतिदर्शों के दिए गए माध्य के आधार पर उन का संयुक्त माध्य ज्ञात कर सकें।
- दिए गए संदर्भ में केन्द्रीय प्रवृत्ति में मापों की उनके सापेक्ष महत्त्व के आधार पर तुलना कर सकें।
- दत्तों की प्रकृति तथा उद्देश्य के अनुसार केन्द्रीय प्रवृत्ति के उपयुक्त माप का चयन कर सकें।

13.3 व्यक्तिगत तथा समूह मापन

मापन परिमाणात्मक विवरण का वह साधन है जिसमें वस्तुओं व घटनाओं को कुछ नियमों के अंतर्गत संख्यात्मक माप दिए जाते हैं। ये वस्तुएं व घटनाएं कभी-कभी दिए गए गुण के मापन

के उद्देश्यों के अनुसार व्यक्तियों या समूहों से संबंधित हो सकती है। अपनाए गए नियम मानदण्ड बन जाते है जो व्यक्तियों अथवा समूहों के विषय में सही सही, क्रमबद्ध व वस्तुनिष्ठ निर्णय लेने में सहायक होते है, जिसके फलस्वरूप हम विभिन्न शैक्षिक समस्याओं के समाधान की ओर अग्रसर हो सकते हैं। इन नियमों की प्रकृति अति साधारण या सरल भी हो सकती है और काफी कठिन व विषम भी। अतः हमारे माप बहुत निम्न (छोटे) स्तर के भी हो सकते है तथा बहुच ऊँचे स्तर के भी। इस प्रकार के मापों से हमें मापन के नामित क्रमसूचक, समान्तराल तथा अनुपात पैमाने प्राप्त होते हैं। उच्च स्तर के पैमानों के लिए कुछ अधिक सुनिश्चित व कठोर नियम होते हैं तथा उनके आधार पर प्राप्त मापों के लिए अधिक संक्रियाओं की आवश्यकता पड़ती है।

13.3.1 केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों की अवधारणा (संकल्पना)

अध्यापक के रूप में आपको विद्यार्थियों की निष्पति या अन्य गुणों से संबंधित विभिन्न प्रकार के आकड़े प्राप्त हुए होंगे जो व्यक्तियों के हो सकते है या व्यक्ति समूहों के। बहुधा हमारी रुचि यह होती है कि हमारे पास सम्पूर्ण समूह के निष्पादन का संक्षिप्त ब्यौरा हों। और यदि एक से अधिक ऐसे समूह हों तो हम चाहेंगे कि निष्पादन के आधार पर उन की तुलना की जा सके ताकि हम बता सकें कि इन में से कौन सा समूह सब से अच्छा है और कौन-सा सब से कमजोर। सामूहिक निष्पादन के ये माप केन्द्रीय प्रवृति के माप कहलाते है। कल्पना कीजिए कि आप के पास नौवीं कक्षा के तीन सैक्सनों के निष्पादन संबंधी आंकड़ों को ब्यौरा है। इस कक्षा के प्रत्येक सैक्सन में 40 विद्यार्थी हैं। इस ब्यौरे के आधार पर हम प्रत्येक सैक्सन के 40 विद्यार्थियों के निष्पादन का एक ऐसा सूचकांक ज्ञात कर सकते हैं जो दिए गए विषय में उनके औसत निष्पादन का द्योतक हो। ऐसा सूचकांक केंद्रीय प्रवृत्ति का माप कहलाएगा। इस का प्रयोग प्रत्येक सैक्सन के प्राप्तांकों की प्रकृति को समझने और विभिन्न समूहों की तुलना करने में किया जा सकता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के सर्वसामान्य रूप से उपयोग होने वाले माप है बहुलक, माध्यिका, तथा माध्य।

13.3.2 मापन पैमाना तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

यदि हमारे पास विद्यार्थियों के किसी लक्षण अथवा गुण संबंधी आँकड़ें है और हम उस गुण के आधार पर पूरे समूह की सामान्य प्रवृत्ति का विवरण देना चाहते हैं तो हम केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी उपयुक्त माप की तलाश करेंगे। यहां पर इस बात पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के उपयुक्त माप का चयन आकड़ों की प्रकृति और विशेषतः उस मापन पैमाने पर निर्भर करेगा जो इन आकड़ों को प्राप्त करने में प्रयुक्त किया गया हो। इस संदर्भ में कई प्रकार की औसत ज्ञात किए जा सकते हैं। यहाँ पर हम नामधेय, क्रमसूचक, तथा समान्तराल पैमानों पर संकलित आकड़ों के लिए क्रमशः बहुलक, माध्यिका तथा माध्य की चर्चा करेंगे।

बोध प्रश्न

टिप्पणी क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

1. सांख्यिकी में प्रयुक्त विभिन्न मापन पैमानो (मापनियों) के नाम बताएं।

....

....

....

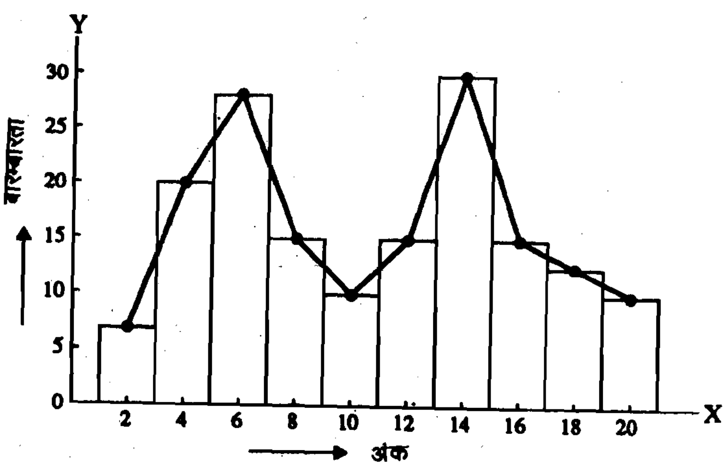
....

13.4 नामित पैमाने पर आधारित आँकड़े तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

बहुलकः नामित पैमाने पर प्राप्त आँकड़े वर्गीकरणीय तथा गुणात्मक होते हैं। प्रत्येक वर्ग में आने वालें तत्वों को गिनकर उनकी संख्या तथा बारम्बारता भी मालूम कर सकते है अर्थात् यह मालूम कर सकते है कि कोई एक प्राप्तांक कितने विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किया गया। इसके आधार पर हमारी रुचि यह हो सकती है कि समस्त समूह में सर्वाधिक बारम्बारता किस वर्ग अंतराल में आती है। अर्थात् प्राप्तांकों का वह वर्ग अंतराल कौन सा है जिसमें सर्वाधिक तत्व सम्मिलित होते हों। शैक्षिक मापन में हम अधिकांश रूप में 'प्राप्तांकों' का प्रयोग करते हैं। वह प्राप्तांक जो अधिकतम विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किया गया हो अर्थात् जिसकी बारंबारता सबसे अधिक हो, उस समूह का बहुलक कहलाता है। उदाहरणार्थः नौवीं कक्षा में 40 विद्यार्थियों के एक सैक्सन में 55 समंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या सब से अधिक है तो हम कहेंगे कि इस सैक्सन का बहुलक 55 है। प्रायः देखा गया है कि ऐसे मूल्य प्रायः मध्य में स्थित होते हैं और इस से कम बारंबारता वाले समंक इसके दोनों ओर फैले रहते हैं। इस प्रकार बहुलक किसी समूह के मानों में सर्वाधिक प्रारूपिक या औसत प्राप्तांकों का कच्चा अनुमान है। बहुलक ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि समूह में सभी विद्यार्थियों के सही प्राप्तांकों को ध्यान में रखा जाए।

सतत चरों की अवस्था में बहुलक एक तत्काल प्राप्य माप है जो केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य मापों की अपेक्षा कम सही है और कम विश्वसनीय भी। यदि आप प्राप्तांकों के आधार पर एक बारम्बारता बहुभुज या आयत चित्र खींचे तो आप देखेंगे कि इस बिन्दु या इस दंड की ऊँचाई सबसे अधिक है।

परन्तु कभी कभी ऐसा भी होता है कि किसी समूह के प्राप्तांक मापन पैमाने पर दो अलग-अलग बिन्दुओं पर संकेन्द्रित होते हैं। ऐसी अवस्था में हम कहते हैं कि प्राप्तांक बंटन द्विबहुलकी है और एक सर्वाधिक बारम्बारता वाले प्राप्तांक को बहुलक नहीं कहा जा सकता। आप नीचे खींचे गए बारम्बारता बहुभुज तथा आयत चित्र को ध्यान से देखें।



चित्र 13.1

ऊपर दर्शाए गए आयत चित्र तथा बारम्बारता बहुभुज में आप देख सकते हैं कि दिए गए बंटन के दो शीर्ष है। एक शीर्ष प्राप्तांक 6 पर है तथा दूसरा प्राप्तांक 14 पर। स्पष्ट है कि 14 एक मात्र बहुलक नहीं हो सकता। अतः बंटन द्विबहुलकी है। एक बहुलक प्राप्तांक 6 पर दूसरा प्राप्तांक 14 पर है। कुछ बंटन बहुबहुलकी भी हो सकते हैं; अर्थात् वे बंटन जिनमें दो से अधिक बहुलक हों। अतः हम बहुलक की परिभाषा देते समय कह सकते हैं कि बहुलक मापन पैमाने पर वह बिन्दु होता है जिस पर बारम्बारता अपने दोनों ओर की बारम्बारताओं की तुलना में सर्वाधिक हो।

13.4.1 अवर्गीकृत दत्तों का बहुलक

मूल्यों या प्राप्ताकों के एक सरल या सामान्य अवर्गीकृत समुच्चय (सैट) में बहुलक वह अकेला माप या प्राप्तांक होता है जो सबसे अधिक बार आंता हो। उदाहरण के लिए; यदि 10 विद्यार्थियों के प्राप्तांक 13, 12, 14, 15, 12, 14, 18, 14, 14 हो तो आप देखेंगे कि 14 प्राप्तांक सबसे अधिक बार आता है। क्योकि 4 विद्यार्थियों ने 14 समंक प्राप्त किए है, और किसी अन्य समंक की 14 से अधिक बारंबारता नहीं है अतः दिए गए अवर्गीकृत दत्तों का बहुलक 14 हुआ।

13.4.2 वर्गीकृत दत्तों से बहुलक का परिकलन

यदि दत्तों को वर्ग अंतराल तथा बारम्बारता के रूप में वर्गीकृत किया गया हो तो जिस बिन्दु पर बारम्बारताओं का संकेंद्रण सर्वाधिक हो,(अर्थात् यह एक शीर्ष बनाता हो) तो वह प्राप्तांक या बिन्दु बहुलक होगा। ऐसी अवस्था में बहुलक मात्र निरीक्षण के आधार पर ही ज्ञात किया जा सकता है। बहुलक उस वर्ग अंतराल का मध्य बिन्दु होगा जिस वर्ग अंतराल की सर्वाधिक बारम्बारता होगी। इस प्रकार से लगाए गए अनुमान के आधार पर ज्ञात किया गया बहुलक अपरिष्कृत या कच्चा बहुलक कहलाता है।

उदाहरण 1: नीचे दिए गए बारम्बारता बंटन का बहुलक मालूम कीजिए।

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
100 - 104	3
95 - 99	4
90 - 94	8
85 - 89	5
80 - 84	2

ऊपर दिए गए बंटन में वर्ग अन्तराल 90-94 की बारंबारता 8 है जो सर्वाधिक है। अतः इस वर्ग अन्तराल का मध्य बिन्दु (अर्थात् 92) बहुलक हुआ। आप को ऐसे बंटन भी प्राप्त होंगे जहां एक से अधिक बहुलक हों; जैसा कि नीचे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट है।

उदाहरण 2

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
90 - 99	4
80 - 89	12
70 - 79	6
60 - 69	7
50 - 59	9
40 - 49	15
30 - 39	7

ऊपर दर्शाया गया बंटन एक द्विबहुलकी बंटन है जिस में सर्वाधिक और लगभग सर्वाधिक बारम्बारताएं दो स्पष्ट रूप से भिन्न बिन्दुओं पर सेंकेन्द्रित हैं। एक वर्ग अंतराल 80-89 पर जहां $f = 12$ तथा दूसरा वर्ग अंतराल 40 - 49 पर जहां $f = 15$। अतः यह बंटन द्विबहुलकी है। ये बहुलक क्रमशः इन दोनों वर्ग अंतरालों के मध्य बिन्दुओं (84.5 व 44.5) पर होंगे। प्रायः बहुलक की व्याख्या एक सरल प्रेक्षणीय औसत के रूप में की जाती है जो बंटन में संकेन्द्रण केन्द्र का एक अनुमानित संकेतक है।

13.4.3 शैक्षिक अवस्थितियां तथा बहुलक का उपयोग

बहुलक का उपयोग निम्न प्रकार की शैक्षिक अवस्थितियों में किया जा सकता है।

- जब केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में सर्वाधिक प्ररूपी मान की आवश्यकता हो, उदाहरण के लिए, कक्षा में सर्वाधिक प्रिय बालक, व्यावसायिक पाठ्यक्रमों के विषय में विद्यार्थियों की सर्वाधिक मान्य धारणा।
- जब केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के मोटे और तत्काल अनुमान की आवश्यकता हो।
- जब आंकड़े पूर्ण न हो या बंटन विषम हो, जहां अधिकांश मान (प्रातांक) अन्त्य हों।

13.4.4 बहुलक की सीमाएं

बहुलक की सीमाएं उस मापन पैमाने से संबंधित होती है जिस पर यह प्रयुक्त होता है। स्पष्टतः बहुलक का आगे कोई सांख्यिकीय विशलेषण नहीं हो सकता है। यह मात्र एक मोटा अनुमान है। कभी-कभी हमें द्विबहुलकीय बंटन भी मिल सकते हैं। ऐसी अवस्था में हमें एक संयुक्त माप ढूँढने में कठिनाई होंती है जो उस बंटन का निरूपण कर सकें। हम नीचे दी गई दो अवस्थाओं को प्रेक्षण करके देख सकते हैं कि बहुलक की क्या सीमाएं हो सकती है।

अवस्था I : सातवीं कक्षा सैक्सन 'अ' के बच्चों के इतिहास विषय में प्राप्तांक नीचे दिए गए हैं।

22, 37, 45, 66, 32, 64, 65, 67, 66, 67, 65, 67, 38, 66, 66, 65, 32, 66, 67, 65, 64, 64, 67, 52, 47, 67, 68, 67, 70

अवस्था II : नौवीं कक्षा सैक्सन 'अ' के बच्चों के गणित विषय के अंक नीचे दिए गए हैं।

18, 20, 23, 24, 24 25, 24, 24, 24, 30, 35, 40, 46, 48, 50, 56, 62, 62, 62, 62, 60, 47, 38, 62, 62, 24, 28, 62, 80.

अवस्था I का निरीक्षण करने पर ज्ञात होता है कि इसमें बहुलक 67 है जबकि इसके निकट के प्राप्तांक 64, 65, 66 भी बहुलक कहे जा सकते हैं। दूसरी अवस्था में आप देखेंगे कि यह बंटन स्पष्ट रूप से द्विबहुलकीय बंटन है जिसके दो बहुलक 24, 62 है क्योंकि दोनों की बारम्बारता बराबर है। इससे हम यह कह सकते है कि बहुलक तो मात्र एक मोटा माप है जो केवल उस अवस्था में काम आ सकता जब हमें किसी बंटन की केन्द्रीय प्रवृत्ति के तत्काल और सरसरे अनुमान की आवश्यकता हो।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

2. i) केन्द्रीय प्रवृत्ति का कौन सा माप मापन के नामित पैमाने से संबंध रखता है?

....

....

ii) नीचे दिए गए प्राप्तांकों का बहुलक ज्ञात कीजिए

12, 18, 19, 18, 18, 14, 18, 13, 12, 18

....

iii) कुछ ऐसी अवस्थाएं बताएं जहां बहुलक का प्रयोग भलीभांति किया जा सकता है

....

13.5 क्रमसूचक मापनी पर आंकड़े (दत्त) तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापः माध्यिका

जब दत्त किसी पदक्रम के अनुसार व्यवस्थित हों तो उन दत्तों की केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप वह बिन्दु हो सकता है जो समस्त बंटन को दो समान भागों में बांट दे। यह बिन्दु माध्यिका होगी। इस प्रकार माध्यिका मापन पैमाने पर वह बिन्दु होता है जिसके ऊपर और नीचे ठीक 50-50 प्रतिशत मामले (केस) आते हों। अतः माध्यिका किसी खण्डित या अपूर्ण बंटन की अवस्था में भी मालूम की जा सकती है, बशर्ते हमें यह ज्ञात हो कि कुल कितने केस हैं और पैमाने पर उनका सम्भावित स्थान क्या है। यह ध्यान रहे कि माध्यिका एक बिन्दु होता है, कोई प्राप्तांक या विशेष माप नहीं। अर्थात् माध्यिका पर किसी के प्राप्तांक हों यह आवश्यक नहीं है।

13.5.1 अवर्गीकृत दत्तों में माध्यिका

अवर्गीकृत दत्तों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए आओं नीचे दिए गए उदाहरण को ध्यान से देखें।

उदाहरण 1 : इन प्राप्तांकों की माध्यिका मालूम कीजिए।

2, 5, 9, 8, 17, 12, 14,

यहाँ पर सात प्राप्तांक हैं। इन्हें आरोही क्रम में लिखने पर हमें प्राप्तांकों की निम्न श्रृंखला प्राप्त होती है।

2, 5, 8, 9, 12, 14, 17

हम देखते है कि प्राप्तांक 9 के नीचे और ऊपर तीन-तीन प्राप्तांक हैं। और स्वंय प्राप्तांक 9 इकाई अंतराल 8.5 - 9.5 का मध्य बिन्दु है। इस प्रकार संख्या 9 समस्त बंटन को दो समान अर्धों में विभक्त करती है। अतः इस अवस्था में बिंदु 9 माध्यिका है।

उदाहरण 2 : नीचे दिए प्राप्तांकों के समुच्चय की माध्यिका मालूम करें।

12, 17, 18, 15, 20, 19

माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहला चरण यह होगा कि दिए गए प्राप्तांकों को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करें। यह क्रम होगा 12, 15, 17, 18, 19, 20। इन छः प्राप्तांकों में दो प्राप्तांक 17 से नीचे हैं और दो प्राप्तांक 18 से ऊपर हैं। प्राप्तांक 17 और 18 इस बंटन के बीच में आते हैं। इस अवस्था में हम जब तक माध्यिका नहीं निकाल पाएंगे जब तक कि इस अंतराल को जो दोनों प्राप्तांकों 17,18 को सम्मिलित करता है, दो समान अर्धों में नही बांट पातें। अंतराल 1.6.5-18.5 (यहां 16.5, 17 की निम्न सीमा है ओर 18.5, 18 की उच्च सीमा है) का मध्य बिन्दु 17.5 होगा। अतः 17.5 वह बिन्दु है जो समस्त बंटन को दो समान अर्धो में विभक्त करता है। क्योंकि 17.5 से ऊपर और नीचे पूरे 50-50 प्रतिशत प्राप्तांक आते हैं अतः इस बंटन की माध्यिका 17.5 हुई।

निष्कर्षः उपर्युक्त दो उदाहरणों के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्राप्तांकों को आरोही (या अवरोही) क्रम में डालने के पश्चात् $(n+1)/2$ वां पद निकाला जा सकता हैं जो माध्यिका होगा। यदि आप उदाहरण 1 को ध्यान से देखेंगे जिसमें कुल 7 प्राप्तांक हैं (जो एक विषम संख्या है) इसमें $(n + 1)/2$ वीं संख्या चौथी संख्या होगी क्योंकि $(7+1)/2 =$ चौथी संख्या जो 9 है। उदाहरण 2 में 6 प्राप्तांक हैं जो एक सम संख्या है। यहां पर $(n +1)/2$ वीं संख्या $(6 + 1)/2 = 3.5$ वीं संख्या होगी। अतः माध्यिका निकालने के लिए तीसरी और चौथी संख्या का औसत मान निकाल लेंगे जो $(17+ 18)/2 = 17.5$ होगा। यही माध्यिका है।

माध्यिका ज्ञात करने के पश्चात आप यह सुनिश्चित करना चाहेंगे कि क्या वास्तव में इस निकाली गई माध्यिका के ऊपर और नीचे 50-50 प्रतिशत प्राप्तांक हैं। इस से आप अपने प्रश्न की शुद्धता की जांच कर सकेंगे।

उदाहरण 3 : नीचे दिए गए प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

16, 28, 32, 45, 75, 28, 26, 34, 37, 52, 18

इसके लिए हम पहले प्राप्तांकों को आरोही क्रम में लिखेंगे (यद्यपि इन्हें हम अवरोही क्रम में भी लिख सकतें है। आरोही क्रम 16, 18, 26, 28, 28, 32, 34, 37, 45, 52, 75 हैं। इसमें कुल ग्यारह प्राप्तांक हैं। $\frac{(n+1)}{2}$ वी संख्या अर्थात् $\frac{11+1}{2}$ = 6 वीं संख्या हुई जो माध्यिका होगी। अतः माध्यिका = 32

उदाहरण 4: नीचे दिए गए प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात करें ।

29, 18, 34, 36, 49, 28, 53, 19, 24, 32

पहले इन्हें आरोही क्रम में रखने पर।

18, 19, 24, 28, 29, 32, 34, 36, 49, 53

कुल दस प्राप्तांक हैं। अतः $\frac{(n+1)}{2}$ वीं संख्या हुई $\frac{10+1}{2}$ = 5.5 वीं संख्या माध्यिका होगी।

5 वीं संख्या = 29

6 वीं संख्या = 32

5.5 वी संख्या अर्थात् माध्यिका $\frac{29+32}{2}$ = 61/2 = 30.5 हुई।

13.5.2 वर्गीकृत दत्तों में माध्यिका ज्ञात करना

जैसा कि पहले बताया गया है माध्यिका मापन पैमाने पर वह बिन्दु है जिस के ऊपर और नीचे ठीक आधे-आधे अर्थात् 50-50 प्रतिशत प्राप्तांक (केस) आते हों। वर्गीकृत दत्तों के संदर्भ में माध्यिका ज्ञात करने के लिए यह मान लिया जाता है कि ऐसी अवस्था में दिए गए किसी वर्ग अंतराल के बीच आने वाली बारंम्बारताएं उस वर्गान्तराल में समान रूप से फैली हुई हैं।

इस बिन्दु को स्पष्ट करने के लिए आइए एक उदाहरण लें :

उदाहरण 5: नीचे दिए गए बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	बारम्बारता	
45-49	3	13= माध्यिका वाले वर्ग अंतराल से ऊपर
40-44	4	के प्राप्तांकों की संख्या (fa) है।
35-39	6	
30-34	8	8 = वे केस है माध्यिका वाले वर्ग अंतराल (fm) में
25-29	7	आने वाले सभी प्राप्तांकों की संख्या (fm) है।
20-24	4	
15-19	5	19 = माध्यिका वाले वर्ग अंतराल से नीचे के सभी
10-14	3	प्राप्तांकों की संख्या (fb) है।
	N = 40	

ऊपर दिए गए उदाहरण में कुल विद्यार्थियों की संख्या 40 हैं। हमें वह बिन्दु मालूम करना है जिस के ऊपर तथा नीचे 20-20 प्राप्तांक आते हैं। ऊपर के तीन वर्ग अंतरालों में कुल 13 प्राप्तांक आते हैं और नीचे के चार अंतरालों में 19 प्राप्तांक आते है। अतः सभी प्राप्तांकों को दो बराबर भागों में बांटने वाला बिन्दु अन्तराल 30-34 में होगा। इस अन्तराल में कुल 8 प्राप्तांक आते हैं। क्योंकि माध्यिका इसी अन्तराल में है, इसे माध्यिका वर्ग कहते है। यह माना जा सकता है कि

सभी 8 प्राप्तांक इस वर्ग अंतराल में समान रूप से बंटे हुए हैं। इस वर्ग अंतराल की सही सीमाएं 29.5 से 34.5 तक हैं। अतः हमें वह बिन्दु ज्ञात करना है जो 29.5 से एक प्राप्तांक ऊपर हो या जो 34.5 से 7 प्राप्तांक के नीचे हो। इस वर्ग अंतराल के 5 स्थान 8 प्राप्तांकों में बराबर बटे हुए हैं। अतः एक प्राप्तांक के हिस्से में 5/8 स्थान आता हैं। अतः माध्यिका = 29.5 + $1 \times 5/8$ = 29.5+ 0.625 = 30.13 (दो दशमलव स्थानों का स्थान लेते हुए)

इस प्रकार के परिकलन के आधार पर निम्नलिखित समीकरण/सूत्र का निर्धारण किया जा सकता है।

माध्यिका $$L + \frac{\left(\frac{N}{2} - fb\right)}{fm} \times i$$

जहां L = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

N = प्राप्तांकों की कुल संख्या

fb = माध्यिका वर्ग से नीचे के वर्ग तक की संचयी बारंबारता

fm = माध्यिका वर्ग की बारंबारता

i = वर्ग अन्तराल की लंबाई

इस सूत्र का प्रयोग करते हुए हम उपर्युक्त उदाहरण की माध्यिका निम्न प्रकार मालूम कर सकते हैं।

माध्यिका $$29.5 + \frac{(20-19)}{8} \times 5$$

$$= 29.5 + \frac{5}{8}$$

$$= 29.5 + 0.625$$

$$= 30.13$$

उदाहरण - 6: निम्नलिखित बारंबारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	105-109	110-114	115-119	120-124	125-129	130-134	135-139	140-144
बारंबारता	7	8	12	16	13	9	9	6

हल

C.I (वर्ग अंतराल)	f	cf (संचयी बारंबारता)	
140-144	6	80	
135-139	9	74	
130-134	9	65	
125-129	13	56	
120-124	16(fm)	43	← माध्यिका वर्ग
115-119	12	27	← fb
110-114	8	15	
105-109	7	7	
	N = 80		

$\frac{N}{2} = 40$

वर्ग अन्तराल 120-124 माध्यिका वर्ग है जिसमें $\frac{N}{2}$ वां मान (20 वां प्राप्तांक) आता है (संचयी बारंबारता स्तम्भ देखो)

fb = 27

fm = 16

i = 5

L = 119.5

$$\text{माध्यिका} = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - fb\right)}{fm} \times i$$

$$= 119.5 + \frac{(40-27)}{16} \times 5$$

$$= 119.5 + \frac{65}{16} = 119.5 + 4.06$$

$$= 123.56 \text{ (उत्तर)}$$

13.5.3 एक विशेष अवस्था में माध्यिका परिकलन

एक ऐसी विशेष अवस्था भी आ सकती है जिसमें माध्यिका वर्ग में कोई भी प्राप्तांक न हो। आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 7: निम्नलिखित बारंबारता बंटन में माध्यिका ज्ञात कीजिए

वर्ग अंतराल	5-7	8-10	11-13	14-16	17-19	20-22	23-25	26-28
बारंबारता	1	7	9	0	6	7	2	2

हल

C.I (वर्ग अंतराल)	f	cf	
26-28	2	34	
23-25	2	32	
20-22	7	30	
17-19	6	23	16.5 से ऊपर 17 प्राप्तांक हैं।
14-16	0	17	शून्य वर्ग अन्तराल
11-13	9	17	13.5 से नीचे 17 प्राप्तांक हैं।
8-10	7	8	
5-7	1	1	
	N = 34		

यदि माध्यिका निकालने के लिए आप ऊपर दी गई सारणी का निरीक्षण करें तो आप पाएंगे कि N/2 =34/2 =17 लगातार दो वर्ग अंतरालों की संचयी बारंबारता है। यदि हम यन्त्रवत् माध्यिका की गणना करे तो हमारा उत्तर गलत हो जाएगा। अतः सीधे रूप से सूत्र का प्रयोग करना और उत्तर निकालना गलत होगा। यदि आप ऊपर से संचयी बारंबारता लिखें तो भी एक अन्य वर्ग

अन्तराल (17-19) की संचयी बारंबारता 17 ही होगी। अतः इस प्रश्न को हम दो वैकल्पिक रूपों में हल करेंगे (i) सम्प्रत्यात्मक रूप में (ii) अनुभवजन्य रूप में।

हल - 1

यदि हम संचयी बारम्बारता ऊपर से गिननी आरंभ करें तो हम देखते हैं कि बिंदु 16.5 से ऊपर 17 प्राप्तांक आते हैं। और यदि नीचे से संचयी बारंबारता देखें तो 13.5 से नीचे भी 17 प्राप्तांक आते है। इस प्रकार हमें ऐसे दो बिंदु प्राप्त होते है जिनके ऊपर और नीचे ठीक 50% प्राप्तांक आते हैं क्योंकि वर्ग अंतराल की बारंबारता 14-16 शून्य है (अर्थात् यह वर्ग अन्तराल शून्य बारम्बारता वाला वर्ग अन्तराल है), हम इस मान्यता को कि किसी वर्ग अन्तराल में सभी बारम्बारताएं समान रूप से बंटी है, आगे बढ़ाते हुए इस शून्य बारंबारता वाले वर्ग अन्तराल के आधे भाग को इसके दोनो और के वर्ग अन्तरालों में जोड़ देते हैं।

अतः माध्यिका $= 13.5 + 3/2 = 13.5 + 1.5 = 15$ (उत्तर)

या माध्यिका $= 16.5 - 3/2 = 16.5 - 1.5 = 15$ (उत्तर)

हल - 2

C.I	f	cf	C.I संशोधित	f	cf	
26-28	2	34	26-28	2	34	
23-25	2	32	23-25	2	32	
20-22	7	20	20-22	7	30	
17-19	6	23	15-19.5	6	23	
14-16	0	17				
11-13	9	17	10.5-15	9(fm)	17	
8 - 10	7	8	8-10	7	8	fb
5 - 7	1	1	5-7		1	1
N = 34						

वैकल्पिक रूप में हम उस वर्ग अन्तराल को संशोधित कर लेते हैं जिसमें N/2 आता है। शून्य बारम्बारता वाले वर्ग अन्तराल को जो हमारे परिकलन को प्रभावित कर रहा है इससे ऊपर व नीचे वाले वर्ग अन्तरालों में आधा-आधा बांट दिया जाता है। और सूत्र का प्रयोग संशोधित वर्ग अंतराल के लिए किया जाता है। यहां पर वर्गान्तराल 14-16 का आधा भाग वर्ग अंतराल 11-13 में मिला दिया जाता है तथा दूसरा आधा भाग वर्ग अंतराल 17-19 में मिला दिया जाता है। ये संशोधित वर्ग अन्तराल उनकी सही सीमाओं के रूप में (संशोधित वर्ग अन्तराल का आकार $3 + 1.5 = 4.5$) व्यक्त किए जाते हैं।

$$\text{माध्यिका} \quad L + \frac{\left(\frac{N}{2} - fb\right)}{fm} \times i$$

$L = 10.5, fb = 8$

$N/2 = 34/2 = 17$

$$\text{माध्यिका} = 10.5 + \frac{(17-8)}{9} \times 4.5$$

$$= 10.5 + 4.5 = 15 \quad \text{उत्तर}$$

13.5.4 माध्यिका की व्याख्या

माध्यिका आंकड़ों (दत्तों) के उस केंद्रीय बिंदु को बताती है जहां कुल बारम्बारताएं आधी-आधी बंट जाती हैं। ऊपर दिए उदाहरण में प्राप्तांक 15 अर्थात् माध्यिका से ऊपर 17 प्राप्तांक (बारम्बारता) आते हैं।

13.5.5 शैक्षिक अवस्थाएं तथा माध्यिका का उपयोग

माध्यिका का प्रयोग निम्नलिखित अवस्थितियों में किया जाता हैः

- यदि दिया गया बंटन अपूर्ण हो।
- यदि ऐसे बिंदु की आवश्यकता पड़ती हो जो समस्त बंटन को दो समान भागों में बांट देता हो।
- यदि बंटन स्पष्ट रूप से विषम हो। अर्थात् बंटन के किसी एक ओर एक या अधिक प्राप्तांक अन्त्य हों। उदाहरण के लिए, 20 विद्यार्थियों के एक समूह में 18 विद्यार्थियों के प्राप्तांक बहुत ही कम हों - मानो 100 में से 15 से 40 तक, परन्तु दो विद्यार्थियों के अंक 95 तथा 100 हों। ऐसे बंटनों को विषम बंटन कहते हैं।
- जब हमारा उद्देश्य मात्र यह मालूम करना हो कि कुछ दिए गए प्राप्तांक ऊपर वाले अर्ध में आते हैं अथवा निम्न अर्ध में; न कि यह कि वें केंद्रीय बिंदु से कितनी दूरी पर हैं।

13.5.6 माध्यिका की सीमाएं

माध्यिका का मान समस्त प्रेक्षणों पर आधारित नही होता है और उनके संख्यात्मक मानों की उपेक्षा करता है। इसका उपयोग बंटन के गुरूत्व केन्द्र के रूप में नहीं किया जा सकता। इसका उपयोग आनुमानिक सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए भी नहीं हो सकता।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

3 i) माध्यिका की परिभाषा दीजिए।

....

....

....

ii) माध्यिका का संबंध मापन के किस पैमानों से होता हैं?

....

....

....

iii) उन शैक्षिक अवस्थितियों का उल्लेख कीजिए जहां माध्यिका का प्रयोग सबसे उपयुक्त हो।

....

....

....

13.6 समान्तराल मापनी पर दत्त तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप - माध्य

माध्य की गणना तब की जाती है जबकि आँकड़े पूर्ण हों तथा समान्तराल पैमाने पर प्रस्तुत किए हुए हों। सामान्य रूप से इसे "अंकगणितीय माध्य" कहा जाता है। माध्य किसी प्रतिदर्श का एक परिशुद्ध वर्णन करता है, तथा अप्रत्यक्ष रूप में उस समष्टि का भी जिसका वह प्रतिदर्श है। माध्य ज्ञात करने के लिए सभी प्राप्तांकों को जोड़कर उसे उनकी कुल संख्या से विभाजित कर दिया जाता है। अर्थात् :

माध्य = $\frac{\Sigma X}{N}$

जहां ΣX = सभी प्राप्तांकों (मूल्यों) का जोड़

N = प्राप्तांकों या व्यक्तियों की संख्या

किसी बंटन के प्राप्तांकों का माध्य मापन पैमाने पर वह बिन्दु होता है जिसे सभी प्राप्तांकों के योग को उनकी संख्या (N) से विभाजित करने पर प्राप्त किया जा सकता है।

13.6.1 अवर्गीकृत दत्तों का माध्य ज्ञात करना

यदि मूल आंकड़े दिए गए हो तो उनका माध्य सभी प्राप्तांकों को जोड़कर उसे प्राप्तांकों की कुल संख्या से भाग देकर ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 8 : नीचे दिए गए प्राप्तांकों के माध्य की गणना कीजिए।

25, 36, 18, 29, 30, 41, 49, 26, 16, 27

माध्य = $\frac{\Sigma X}{N} = \frac{25 + 36 + 18 + 29 + 30 + 41 + 49 + 26 + 16 + 27}{10}$

$= \frac{292}{10}$

= 29.7 (उत्तर)

13.6.2 वर्गीकृत दत्तों का माध्य ज्ञात करना

वर्गीकृत दत्तों के संदर्भ में दो अवस्थाएं हो सकती हैं:

(i) जब प्राप्तांक तथा उनकी बारम्बारताएं दी गई हों।

(ii) जब दत्तों को वर्ग अंतरालों में बांटा गया हो और प्रत्येक वर्ग अंतराल की बारंबारता भी दी गई हों। दूसरी अवस्था में माध्य या तो लंबी विधि द्वारा या छोटी विधि द्वारा ज्ञात कर सकते है। छोटी विधि अपनाने की अवस्था में कल्पित माध्य (Assumed Mean) लेना पड़ेगा। ये दोनों अवस्थाएं नीचे समझाई गई हैं:

(अ) माध्य ज्ञात करना यदि प्राप्तांक तथा उनकी बारंबारताएं दी गई हों

उदाहरण - 9 : निम्नलिखित दत्तों का माध्य ज्ञात कीजिए

प्राप्तांक	18	20	24	35	42	48	50
बारंबारताएं	2	4	3	8	6	4	3

हल : हम निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे

माध्य (M) = $\frac{\Sigma X}{N}$

जहां X = प्राप्तांक, f प्राप्तांक X की बारंबारता, N = Σf (कुल बारंबारताएं या प्राप्तांक)

प्राप्तांक (X)	f	fX
18	2	36
20	4	80
24	3	72
35	8	280
42	6	252
48	4	192
50	3	150
	N = 30	ΣfX = 1062

माध्य (M) = $\frac{\Sigma fX}{N}$

= 1062/30

= 35.4 (उत्तर)

ब) वर्गीकृत बारंबारता बंटन के आधार पर माध्य की गणना करना

यदि वर्गीकृत बारंबारता बंटन दिया हुआ हो तो निम्नलिखित सूत्र की सहायता से माध्य ज्ञात किया जाता है। अर्थात् :

माध्य = $\frac{\Sigma fX}{N}$

जहां X = वर्ग अंतराल का मध्य बिंदु

f = बारंबारता

N = Σf प्राप्तांकों की कुल संख्या

यहां पर यह मान लिया जाता है कि सभी बारंबारताएं संबंधित वर्ग अंतराल के मध्य बिंदु पर केंद्रित हैं। अतः सूत्र में प्राप्तांकों के स्थान पर इन मध्य बिंदुओं का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण 10 : निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अन्तराल	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
बारंबारता	4	6	8	14	10	5	3

हल

C.I	f	X (माध्य बिंदु)	fX
40-44	3	42	126
35-39	5	37	185
30-34	10	32	320
25-29	14	27	378
20-24	8	22	176
15-19	6	17	102
10-14	4	12	48
	N = 50		ΣfX = 1335

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

= 1335/50

= 26.7 (उत्तर)

स) **कल्पित माध्य विधि द्वारा माध्य का परिकलन :**

संक्षिप्त विधि

कल्पित माध्य विधि में हम मध्य बिंदुओं तथा उनके संगत बारंबारता के लंबे गुणनफल करने की लंबी प्रक्रिया से बच जाते हैं। सर्वप्रथम हम उस वर्ग को ढूढ़ते हैं जो बंटन के लगभग मध्य में स्थित होता है। इस वर्ग अन्तराल के मध्य बिंदु को कल्पित माध्य (A.M) मान लेते हैं। अब इसके ऊपर या नीचे के वर्ग अंतरालों का मध्य बिंदु इस वर्ग अन्तराल के मध्य बिंदु से 1, 2, 3 आदि वर्ग अंतराल ऊपर या नीचे होगा। अतः कल्पित माध्य वाले वर्ग अंतराल से अन्य वर्ग अंतराल क्रमशः +1, +2, +3 इत्यादि और -1, -2, -3 इत्यादि वर्ग अंतरालों की दूरी पर होंगे। यें संख्याएं किसी वर्ग अंतराल के मध्य बिंदु से काल्पित माध्य को घटाकर तथा उसे वर्ग अंतराल की लंबाई से भाग देकर प्राप्त की जा सकती है। व्यवहार में ऐसा करने की आवश्यकता नहीं पड़ती। इस विधि को पग विचलन या सोपान विचलन विधि भी कहते हैं।

इस विधि के विभिन्न चरण निम्नलिखित होंगे।

— दत्तों को सर्वप्रथम सारणीबद्ध रूप में व्यवस्थित करें अर्थात् वर्ग अंतराल के लिए C.I, बारंबारता के लिए f, विचलन के लिए d और बारंबारता तथा विचलन के गुणनफल के लिए fd स्तम्भ बनाएं।

— वह वर्ग अंतराल मालूम करें जो बंटन के लगभग मध्य में स्थित है। यदि ऐसे दो वर्ग अंतराल हों तो ऐसी अवस्था में उस वर्ग अंतराल को चुने जिसकी बारंबारताएं अधिक हों।

— विचलन वाले स्तम्भ d को इस प्रकार भरे : A.M वाले वर्ग अंतराल के सामने शून्य लिखें तथा इससे ऊपर के वर्ग अंतरालों के सामने क्रमशः +1, +2, +3, ... इत्यादि लिखते जाएं और इससे नीचे के वर्ग अंतरालों के सामने क्रमशः -1, -2, -3, ... इत्यादि लिखते जाएं।

— प्रत्येक वर्ग की बारंबारता तथा इसके संगत विचलन को गुणा करें और गुणनफल को fd स्तम्भ के नीचे लिखते चले जाएं।

— fd वाले स्तम्भ का योग अर्थात् Σfd ज्ञात करें।

— इसके पश्चात माध्य निकालने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें :

$$\text{माध्य} = AM + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$$

जहां AM = कल्पित माध्य

f = बारंबारता

d = कल्पित माध्य से विचलन वर्ग अंतराल की दूरी के रूप में

i = वर्ग अंतराल का आकार (लंबाई)

उदाहरण 11 : यहां पर हम उदाहरण 10 में दिए प्रश्न का ही माध्य ज्ञात करेंगे।

C.I	f	d	fd	
40-44	3	+3	+9	
35-39	5	+2	+10	+ 29
30-34	10	+1	+10	
25-29	14	0	0	
20-24	8	−1	−8	
15-19	6	−2	−12	− 32
10-14	4	−3	−12	
	N = 50	$\sum fd = -3$		

माध्य $= AM + \frac{\Sigma fX}{N} \times i = AM = \frac{24.5 + 29.5}{2} = 27$

$\Sigma fd = -32 + 29 = -3$

$N = 50$

$i = 5$

टिप्पणी : ध्यान रहे हमने A.M ज्ञात करने के लिए वर्ग अंतराल की सही (शुद्ध) सीमाओं का उपयोग किया है

यहां पर हमारा कल्पित माध्य (A.M) 27 है। वर्ग अंतराल 30-34 का विचलन $\frac{32 - 27}{5} = 1,$

इसी प्रकार आगे का विचलन भी ज्ञात किए गए हैं।

माध्य $= AM + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$

$= 27 + \frac{-3}{50} \times 5$

$= 27 - 0.3$

$= 26.7$ (उत्तर)

टिप्पणी : इस विधि से प्रश्न हल करने के लिए d वाले स्तम्भ में AM से ऊपर और नीचे सदैव क्रमशः +1, +2, +3 इत्यादि तथा −1, −2, −3 इत्यादि ही लिखे जाते हैं। वास्तव में यह प्रक्रिया यन्त्र-वत होती है, जिससे हम विचलन मालूम करते हैं। अर्थात् d स्तम्भ में AM वाले वर्गान्तराल के सम्मुख शून्य लिखा जाएगा। इसके पश्चात् बढ़ते हुए वाले प्राप्तांकों की ओर आने वाले वर्गों में शून्य से आरंभ करते हुए +1, +2, +3 इत्यादि लिखें तथा घटते हुए प्राप्तांकों की ओर शून्य से आरंभ करते हुए −1, −2, −3 इत्यादि लिखते जाए। इससे आपके समय की बचत भी होगी।

13.6.3 माध्य की व्याख्या

माध्य सभी प्राप्तांकों के गुरूत्व केंद्र को दर्शाता है। किसी भी प्रतिदर्श में सभी माप माध्य के दोनों ओर पूर्ण रूप से संतुलित होते हैं। दूसरें शब्दों में हम कह सकते है कि माध्य से प्राप्तांकों के विचलन का योग सदैव शून्य होता है। माध्य के परिकलन में समस्त मापों अथवा प्रेक्षणों का उपयोग किया जाता है। माध्य की उच्च विश्वसनीयता तथा आनुमानिक सांख्यिकी में उपयोगिता के कारण इसे प्राथमिकता दी जाती है। माध्य दिए गए समूह के सभी सदस्यों के औसत निष्पादन का द्योतक है। इस का उपयोग ये जानने के लिए किया जाता कि विभिन्न प्राप्तांक केन्द्रीय मूल्य (मान) से किस प्रकार भिन्न हैं।

13.6.4 शैक्षिक अवस्थाएं तथा माध्य का उपयोग

माध्य का उपयोग किया जाएगा यदि :

i) प्राप्तांक किसी केंद्रीय बिंदु के दोनों ओर लगभग सममित रूप से बंटित है; अर्थात् प्राप्तांक स्पष्ट रूप से विषम नहीं हैं।

ii) हम प्रतिदर्श का गुरूत्व केन्द्र मालूम करना चाहते हों।

iii) अत्यधिक स्थायी (स्थिर) केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप की आवश्यकता हो।

iv) आनुमानिक उद्देश्य के लिए अन्य सांख्यिकीय मूल्यों (जैसे मानक विचलन, सहसंबंध गुणांक इत्यादि की आवश्यकता हों।

v) समूह के निष्पादनों की सही तथा शुद्ध तुलना की जानी हो।

13.6.5 माध्य की सीमाएं

कभी-कभी जबकि कुछ मान (प्रेक्षण) अन्य मानों की तुलना में बहुत बड़े हों या बहुत छोटें हो तो बंटन का माध्य भ्रामक सिद्ध हो सकता है। उदाहरण के लिए, यदि आप कक्ष का औसत आकार का अध्ययन करना चाहते हैं और यदि 5 कक्षाओं में छात्रों की संख्या 100 - 150 के मध्य हों, 10 कक्षाओं में 50 से 100 के मध्य हों और 35 कक्षाओं में 30 - 50 के मध्य हो, तो निकाला गया माध्य 55.5 प्रातिनिधिक मान नहीं होगा। किस एक कक्षा के 5 विद्यार्थियों के समूह में भी यदि प्राप्तांक 12, 15, 20, 25 व 100 हो तो मध्यमान 34.4 काफी भ्रामक हो सकता है। ऐसी अवस्थाओं में माध्य कोई सार्थक सूचना प्रदान नहीं करता है।

13.6.6 संयुक्त माध्य

आपने प्रायः देखा होगा कि विद्यालय में एक ही कक्षा के 3 या 4 सैक्सन अलग-अलग आकार के होते हैं और हम किसी दिए गए सैक्सन का माध्य निष्पादन उपर्युक्त विधियों द्वारा ज्ञात करते हैं। परन्तु यदि हम पूरे विद्यालय का माध्य निष्पादन ज्ञात कराना चाहें तो हमें ऐसी विधि की आवश्यकता होगी जिससे सभी सैक्सनों का संयुक्त माध्य ज्ञात किया जा सके। इसी प्रकार यदि हमारे पास विभिन्न विद्यालयों के माध्य निष्पादन उपलब्ध हों और पूरे जनपद का माध्य निष्पादन ज्ञात करना हो तो भी संयुक्त माध्य निकालने की विधि का ज्ञान होना आवश्यक है।

उदाहरणार्थ :

विभिन्न प्रतिदर्शों के माध्य	44.6	55.0	58.5
प्रतिदर्शों के आकार	20	40	140

$$\text{संयुक्त माध्य} = \frac{N_1M_1 + N_2M_2 + N_3M_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$

$$= \frac{20 \times 44.6 + 40 \times 55.0 + 140 \times 58.5}{20 + 40 + 140}$$

$$= \frac{892 + 2200 + 8190}{200} = \frac{11282}{200}$$

= 56.41 (उत्तर)

उपर्युक्त उदाहरण के आधार पर आप देख सकते हैं कि संयुक्त/भारित माध्य 56.41 प्राप्त हुआ। यदि गलती से हम सभी माध्यों का योग करके योगफल को तीन से भाग दे दें तो औसत 52.7 आता है। स्पष्टतः यह गलत होगा। अतः संयुक्त/भारित माध्य निकालने के लिए उपर्युक्त विधि का प्रयोग करना चाहिए।

13.6.7 माध्य, माध्यिका, तथा बहुलक में संबंध

विभिन्न प्रकार के दत्तों के साथ कार्य करते समय आप को ऐसी अवस्थितियां मिल सकती हैं जहां ये तीनों मूल्य एक दूसरे के बहुत निकट होंगे या बहुत भिन्न-भिन्न होंगे। मुख्यतः यह बंटन की प्रकृति पर निर्भर करता है। किसी पूर्ण रूप से सममित तथा एक बहुलकी बंटन में ये तीनों मूल्य एक-दूसरे के बहुत निकट होते हैं और कभी-कभी तो समान भी हो सकते हैं। जैस-जैसे बंटन की सममिति बिगड़ती जाती है इन तीनों मूल्यों (माध्य, माध्यिका, तथा बहुलक) के मान में अंतर आता जाता है। एक बहुत कच्चे रूप में इन तीनों के मध्य निम्न प्रकार संबंध दिखाया जा सकता है।

बहुलक = 3 × माध्यिका - 2 × माध्य

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

4. i) माध्य की परिभाषा दीजिए।

....

....

....

ii) हमें माध्य का उपयोग किन किन अवस्थितियों में करना चाहिए?

....

....

iii) माध्य किस अवस्था में भ्रामक में हो सकता है?

....

....

....

iv) किस अवस्था में माध्य, माध्यिका तथा बहुलक एक जैसे या समान होंगे?

....

....

13.7 माध्य, माध्यिका, तथा बहुलक की तुलना

पिछले परिच्छेदों में माध्य, माध्यिका, तथा बहुलक की विशेषताओं पर चर्चा की थी। और इसके अतिरिक्त उन अवस्थितियों का उल्लेख भी किया हैं जिनमें इनका सही उपयोग हो सकता हैं। माध्य, माध्यिका तथा बहुलक में बहुत सी बातों के आधार पर एक-दूसरे से भिन्न होते हैं। इनका उपयोग करते समय दत्तों की प्रकृति, मापन पैमाने, तथा मापन के उद्देश्यों को ध्यान में रखने की आवश्यकता हैं। तथापि माध्य इन सब में अधिक परिशुद्ध, विश्वसनीय तथा स्थायी माप है। यदि बंटन विषम हों या विकृत हों तो इसका उपयोग नहीं करना चाहिए। यदि दत्तों के प्रत्यक्ष मूल्य को देखने मात्र से कोई निर्णय लेना हो तो बहुलक ही सर्वाधिक उचित माप है। परन्तु यदि माप विषम हों अथवा विकृत हों तो माध्यिका सर्वाधिक वांछनीय माप हो सकता है। यदि और

आगे संख्यिकीय विश्लेषण करना हो तो माध्य का उपयोग करना चाहिए। वस्तुतः इनमें से किसी को भी सभी अवस्थाओं के लिए उचित या अनुचित नहीं समझा जा सकता। इनका उपयुक्त चयन संदर्भ पर निर्भर है। यदि आवश्यकता हो तो किसी विशेषज्ञ का परामर्श ले लेना चाहिए'

13.8 उपयुक्त औसत का चयन

उपयुक्त औसत के चयन के लिए दत्तों की प्रकृति तथा उद्देश्य के निरीक्षण का अनुभव और अर्न्तदृष्टि की आवश्यकता होती है। इस इकाई के विभिन्न परिच्छेदों जैसे 13.4.3, 13.4.4, 13.5.5, 13.5.6, 13.6.4, 13.6.5, 13.6.7 तथा 13.7 को ध्यान से पढ़ने पर आप उपयुक्त निर्णय ले सकते हैं। मापन पैमाना जिस पर दत्त प्राप्त किए गए हैं, भी उपयुक्त औसत के चयन में महत्वपूर्ण योगदान दे सकता है। दत्तों को एक मापन पैमाने से दूसरी मापन पैमाने में परिवर्तित करना भी संभव हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के चयन के औसत के उपयोग के उद्देश्यों को ध्यान में रखना चाहिए।

13.9 सारांश

अब तक हमने केंद्रीय प्रवृत्ति के तीन मापों, उनके परिकलन की विधियों, तथा विभिन्न शैक्षिक अवस्थितियों में उन के सापेक्ष महत्त्व की चर्चा की है जैसे-जैसे हम नामित पैमाने से क्रम सूचक तथा फिर समान्तराल पैमाने की ओर बढ़ते हैं, हमारे केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप क्रमशः बहुलक, माध्यिका तथा माध्य होंगे। अतः उनकी उपयोगिता की अवस्थितिओं और सीमाओं के विषय में ध्यानपूर्वक निर्णय लेना चाहिए। इन सभी मापों के परिकलन के अभ्यास के लिए आप किसी पाठ्यपुस्तक तथा विद्यालयी अवस्थितियों से प्रश्न अथवा समस्याएं चुन सकते हैं। केन्द्रीय प्रवृति के मापों तथा प्रकीर्णन के मापों (जिन्हें आप अगली इकाई में पढ़ेंगे) के परिकलन के पश्चात् आप विद्यालयी अवस्थितियों से प्राप्त दत्तों को अच्छी प्रकार समझ सकते हैं तथा सार्थक रूप में उनकी व्याख्या कर सकते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

5. केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के उपयुक्त चयन के लिए मुख्य रूप से किन किन बातों का ध्यान रखना चाहिए?

....

....

13.10 अभ्यास कार्य

1. अपनी तथा अपने किसी साथी की कक्षा के विद्यार्थियों के विषय में निष्पादन के समंकों को एकत्र करके उनके माध्य, माध्यिका, बहुलक, तथा संयुक्त माध्य निकालिए तथा उनकी व्याख्या कीजिए।

2. निम्नलिखित अवस्थितियों को जांचे तथा प्रत्येक के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति की उपयुक्त माप बताएं। इनका उपयोग करें तथा अपने परिणामों की व्याख्या करें।

(i) 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा में दो सब से कमजोर विद्यार्थियों के प्राप्तांक खो गए। शेष प्राप्तांक इस प्रकार हैं

18, 20, 23, 37, 28, 46, 64, 29, 32,18, 19, 24, 36, 25, 24, 11, 17, 29, 64, 38, 28, 35, 32, 28, 29, 30, 42, 57.

केन्द्रीय प्रवृत्ति के उपयुक्त माप की गणना (परिकलन) कीजिए और अपने उत्तर की व्याख्या कीजिए।

(ii) 12 विद्यार्थियों के प्राप्तांक इस प्रकार थे: 10, 14, 28, 38, 27, 38, 42, 38, 47, 38, 15, 38 ।

इस समूह की समान्य निष्पत्ति के विषय में आप क्या कह सकते हैं?

(iii) 15 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न प्रकार थे :

28, 37, 14, 68, 15, 28, 30, 34, 64, 39, 19, 70, 28, 34, 37

इस समूह के औसत निष्पादन की व्याख्या सबसे अच्छी तरह किस प्रकार कर सकते हैं? स्पष्ट करें।

3. बहुलक की परिभाषा दें और नीचे दिए गए 10 प्राप्तांकों के समुच्चय का बहुलक ज्ञात करें।

26, 28, 30, 41, 32, 31,35, 31, 31, 29

4. निम्नलिखित बंटन के लिए अपरिष्कृत बहुलक का परिकलन करें

वर्ग अंतराल	190-199	180-189	170-179	160-169	150-159	140-149	130-139	120-129
बारंबारता	4	6	8	12	16	9	3	2

5. निम्नलिखित बंटन के लिए बहुलक का परिकलन कीजिए।

वर्ग अंतराल	80-84	75-79	70-74	65-69	60-64	55-59	50-54	45-49	40-44
बारंबारता	6	7	8	12	16	11	6	5	4

6. शिक्षा में बहुलक के उपयोग पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखें।

7. दो ऐसी अवस्थितियों की कल्पना करें जिन का बहुलक तो हो परन्तु अंक नही दिए जा सकते हो।

(**संकेत** : कुछ विशिष्ट खेलों के लिए वरीयता, पुस्तकों के प्रकार, कपड़ों या जूतों का आकार इत्यादि)

8. माध्यिका की परिभाषा दीजिए। और उन उपयुक्त शैक्षिक अवस्थितियों का उल्लेख कीजिए जहां इसका उपयोग किया जा सकता हो।

9. निम्नलिखित दो बारंबारता बंटनों की माध्यिकाएं निकालें।

(अ)

वर्ग अंतराल	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84
बारंबारता	5	8	17	26	13	12	9

(ब)

वर्ग अंतराल	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	160-169
बारंबारता	6	6	8	0	12	8

10. माध्य की परिभाषा दीजिए तथा इसके लाभ बताइए

11 निम्नलिखित प्राप्तांकों का माध्य ज्ञात कीजिए।

18, 28, 26, 15, 45, 40, 29, 41, 54, 44

12 निम्नलिखित बारंबारता बंटन के माध्य का परिकलन करें।

वर्ग अंतराल	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	160-169
बारंबारता	18	24	36	54	23	15

13. यदि एक समूह के 40 व्यक्तियों का माध्य 68 था, तथा दूसरे समूह के 50 व्यक्तियों, का माध्य 46 था, तो संयुक्त/भारित माध्य ज्ञात करो।

13.11 चर्चा के बिंदु

इस इकाई को पढ़ने तथा दिए गए अभ्यास प्रश्नों को हल करने के पश्चात् आपको शायद यह आश्चर्य होगा कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन अलग-अलग मापों की क्या आवश्यकता थी। यदि किसी भी अवस्था में किसी भी माप का प्रयोग कर लें तो क्या गलत होगा? आप यह भी सोच सकते हैं कि यदि हम उनका उपयोग (केंद्रीय प्रवृति के विभिन्न मापों का) सही प्रकार से करना चाहें तो इन मापों के क्या विशेष लाभ और सीमाएं हो सकती हैं। आपको चाहिए कि विभिन्न प्रतिदर्शो के माध्यों के माध्य के परिणामों की तुलना करें (बिना N का प्रयोग करे) तथा उन विशिष्ट अवस्थितियों की भी तुलना करे जहां केन्द्रीय प्रवृति के मापों के अनुपयुक्त उपयोग (प्रयोग) का परिणाम काफी गंभीर हो सकता है। उन समान्य शैक्षिक अवस्थितियों को सूचीबद्ध करें जहां पर केन्द्रीय प्रवृति के मापों की आवश्यकता होती है और देखें कि वांछित उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए इनमें से कौन से माप का उपयोग सबसे उचित होगा।

13.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. नामित, क्रमसूचक, तथा अन्तराल पैमाने।

2. i) बहुलक

   ii) 18

   iii) अ) यदि केन्द्रीय प्रवृत्ति के मोटे से माप की तुरन्त आवश्यकता हो।

   ब) यदि केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में एक प्रारूपिक मान की आवश्यकता हो।

   स) यदि आंकड़े विकृत हों या बंटन विषम हो।

3. i) मापन पैमाने पर माध्यिका वह बिंदु जिसके नीचे तथा ऊपर ठीक 50-50 प्रतिशत प्राप्तांक हों।

   ii) क्रमसूचक पैमाना।

iii) अ) जब आंकड़े अधूरे हों।

ब) जब बिल्कुल ठीक मध्य बिंदु की आवश्यकता हो।

स) जब बंटन अत्यधिक विषम हो।

द) जब मात्र यह जानना हो कि प्राप्तांक बंटन के ऊपर वाले अर्ध में स्थित हैं अथवा नीचे वाले अर्ध में।

4. i) सभी मापों (मूल्यों) के योग को उनकी कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त मूल्य माध्य कहलाता है।

ii) अ) प्राप्तांक किसी केंद्रीय बिंदु के दोनो ओर सममित रूप से बंटित होते हैं।

ब) प्रतिदर्श के गुरूत्व केंद्र की आवश्यकता होती हो।

स) सर्वाधिक स्थायित्व सहित केंद्रीय प्रवृत्ति के माप की आवश्यकता हो।

द) पूर्वानुमान संबंधी उद्देश्यों के लिए दूसरे सांख्यिकीय मानों (मूल्यों) की आवश्यकता हो।

ध) यदि विभिन्न समूह निष्पादनों की परिशुद्ध तुलना करनी हो।

iii) जब कुछ माप (प्रेक्षण) या तो बहुत बड़े हों या बहुत छोटे हो।

iv) जब बंटन पूर्णतया सममित तथा एक बहुलकीय हो।

5. वह मापन पैमाना जिस पर दत्त लिए गए हों या प्राप्य हों तथा प्राप्य दत्तों की प्रकृति।

13.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Garrett, H.E. (1973): *"Statistics in Psychology and Education"*, Vakils, Feffer and Simons Pvt. Ltd , Bombay.

Guilford, J.P. (1965): *"Fundamental Statistics in Psychology and Education"*, McGraw Hill Book Company, New York.

Hannagan, T.J. (1982): *"Mastering Statistics"*, The Macmillan Press Ltd., New York.

Lindgren, B.W. (1975): *"Basic Idea of Statistics"*, Macmillan Publishing Co. Inc., New York.

Walker, H.A. and Lev, J. (1965): *"Elementary Statistics Methods"*, Oxford & IBH Publishing Co., Calcutta.

Wine, R.L. (1976): *"Beginning Statistics"*, Winthrop Publishers Inc., Massachusetts.