इकाई 14 प्रकीर्णन के माप

संरचना

14.1 प्रस्तावना

14.2 उद्देश्य

14.3 प्रकीर्णन का अर्थ

14.4 प्रकीर्णन मापों का महत्त्व

14.5 परास की अवधारणा

14.6 चतुर्थक विचलन की अवधारणा

 14.6.1 चतुर्थक विचलन का परिकलन

 14.6.2 चतुर्थक विचलन की व्याख्या

14.7 शतमकों की अवधारणा

 14.7.1 शतमकों का परिकलन

 14.7.2 शतमकों की व्याख्या

 14.7.3 शतमकों की सीमाएँ

14.8 माध्य विचलन की अवधारणा

 14.8.1 माध्य विचलन का परिकलन

 14.8.2 माध्य विचलन की व्याख्या

14.9 मानक विचलन की अवधारणा

 14.9.1 मानक विचलन का परिकलन

 14.9.2 मानक विचलन की व्याख्या

14.10 कक्षा में मानक विचलन, चतुर्थक विचलन तथा शतमक के उपयोग

14.11 सारांश

14.12 अभ्यास कार्य

14.13 चर्चा के बिन्दु

14.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

14.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें

14.1 प्रस्तावना

इस खंड की इकाई 12 व 13 में आपने आंकड़ों के सारणीयन तथा आलेखी निरूपण के विषय में पढ़ा है। और इसके अतिरिक्त केन्द्रीय प्रवृति की मापों का अध्ययन भी किया हैं। केन्द्रीय प्रवृति के माप किसी दिए गए बंटन की मात्र एक महत्त्वपूर्ण विशेषता को बता सकते हैं, अर्थातः अवस्थिति के माप या उस विचर के मान को जिसके चारों ओर बन्टन केन्द्रित रहता है। बंटन की दूसरी महत्त्वपूर्ण विशेषता इसकी परिवर्तिता होती है। अतः आंकड़ों की प्रकीर्णन के विषय में जानना भी उतना ही महत्त्वपूर्ण है , जो केन्द्रीय प्रवृति के मापों के निकट संकेन्द्रित हो सकते हैं अथवा उनके चारों ओर बिखरे हुए भी हो सकते हैं।

इस इकाई में आप विचरण या प्रकीणन का अर्थ तथा महत्त्व, इन मापों के परिकलन की विधि तथा व्याख्या, और इन मापों के कक्षा की यथार्थ अवस्थितियों के अन्तर्गत उपयोगों का अध्ययन करेंगे। इसके पश्चात् आप इन्हें अपने विद्यार्थियों को पढ़ाने में अधिक सक्षम हो जाएंगे।

14.2 उद्देश्य

इस इकाई को पढने के पश्चात् आप इस योग्य हो जाएंगे कि आप:

- प्रकीर्णन की अवधारणा को स्पष्ट कर सकें।
- केन्द्रीय प्रवृति के मापों तथा प्रकीणन के मापों में अन्तर बता सकें।
- प्रकीर्णन की मापों के महत्त्व को बता सकेंगे
- चतुर्थक विचलन (Q) को अपने शब्दों में परिभाषित कर सकेंगे।
- दिए गए आंकड़ों के लिए Q का परिकलन कर सकेंगे।
- Q के प्राप्त मान की व्याख्या कर सकेंगे
- कुछ विशेष शतमकों को परिभाषित कर सकेंगे तथा उनका परिकलन भी कर सकेंगे।
- स्वयं निकाले गए शतमक की व्याख्या कर सकेंगे।
- माध्य विचलन को अपने शब्दों में परिभाषित कर सकेंगे।
- अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत दत्त के माध्य विचलनों को परिकलित कर सकेंगें।
- स्वयं ज्ञात किए गए माध्य विचलन की व्याख्या कर सकेंगे।
- मानक विचलन (σ) को अपने शब्दों में परिभाषित कर सकेंगे।
- अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत दोनों प्रकार के दत्तों का मानक विचलन परिकलित कर सकेंगे।
- स्वयं निकाले गए मानक विचलन की व्याख्या कर सकेंगे।
- अध्यापन-अधिगम प्रक्रिया के सुधार के लिए कक्षा में प्रकीर्णन के उपयुक्त माप का उपयोग कर सकेंगे।

14.3 प्रकीर्णन का अर्थ

केन्द्रीय प्रवृति के माप ,किसी बन्टन का मात्र एकल बिन्दु ही निरूपण करते हैं परन्तु सही निर्णय लेने के लिए इस सूचना से कुछ अधिक की आवश्यकता पड़ती है। उदाहरण के लिए गणित की परीक्षा में किन्हीं दो समूहों के बालकों के प्राप्तांकों पर विचार करें

समूह 'अ': 8,12,11,12,10,8,9,11,12,10,8,10,9,10,12,8,10,9,10,11

समूह 'ब': 15,2,8,12,4,17,20,6,2,18,16,0,3,9,6,10,15,17,9,11

इन दोनों बन्टनों के माध्य का परिकलन करने के पश्चात् आप देखेंगे कि दोनों समूहों का औसत निष्पादन एक जैसा है। तथापि, यदि आप दोनों समूहों के बालकों के प्राप्तांकों को ध्यान से देखें तो पता चलेगा कि समूह "अ" में किसी भी बच्चें के 8 से कम या 12 से अधिक अंक नहीं हैं, जबकि समूह "ब" में बहुत से ऐसे विद्यार्थी है जिनके 8 से कम या 12 से अधिक अंक हैं। वस्तुतः समूह "ब" में प्राप्तांक 0 से 20 के मध्य प्रकीर्णन करते हैं। समांगता की दृष्टि से ये दोनों समूह तुलनीय नही हैं या एक समान नही है, यद्यपि इनका माध्य एक जैसा है। समूह "अ" समांगी हैं जबकि समूह "ब" बिल्कुल विषमागी है। केन्द्रीय प्रवृति के मापों से परिवर्तिता / प्रकीर्णन सम्बन्धी यह सूचना प्रकट नही होती। केन्द्रीय मान के चारों ओर होने वाले विस्तार की सीमा को प्रदर्शित करने वाले गुण को प्रकीर्णन कहते हैं। प्रकीर्णन को फैलाव, बिखराव या परिवर्तिता भी कह सकते हैं।

प्रकीर्णन के माप, प्राप्तांकों की परिवर्तिता का परिमाणात्मक माप प्रदान करते हैं। जिस प्रकार के केन्द्रीय प्रवृति का माप, मापन के पैमाने पर एक बिन्दु होता है , प्रकीर्णन का माप भी, मापन

के पैमाने पर एक दूरी होती है। सामान्य प्रयोग में आने वाले प्रकीर्णन के माप हैं : परास, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, तथा मानक विचलन। अब हम इनका विस्तार से अध्ययन करेंगे।

14.4 प्रकीर्णन मापों का महत्त्व

केन्द्रीय प्रवृति के मापों का उपयोग विभिन्न दत्तों की तुलना करने में होता है परन्तु ये माप किसी बन्टन की परिवर्तिता से सम्बन्धित कोई सूचना प्रदान नही करते। बंटन की प्रकृति के विषय में जो अकेली केन्द्रीय प्रवृति बता सकती है उससे कहीं अधिक प्रदत्तों की परिवर्तिता बता सकती है। प्रकीर्णन का माप किसी दिए गए अंकों के समुच्चय के सन्दर्भ में परिवर्तिता के अंश को मात्रात्मक सूचकांक के रूप में बता सकता है। दो या दो से अधिक समूहों के व्यक्तियों के किसी गुण में पाई जाने वाली परिवर्तिता की तुलना करने के लिए उस गुण पर प्रत्येक समूह के प्रकीर्णन माप की आवश्यकता होती है। तुलना के लिए अपेक्षित मात्रात्मक सूचकांक एक ही इकाई में उपलब्ध होने चाहिए। प्रकीर्णन के माप, और विशेषतः मानक विचलन, की आवश्यकता बहुत से अन्य प्रकार के सांख्यिकीय विश्लेषणों में होती है। इस इकाई के आगे के भाग में आप प्रकीर्णन के विभिन्न मापों के विषय में पढ़ेगे।

14.5 परास की अवधारणा

प्रकीर्णन का सर्वाधिक सरल माप परास हैं। यह किसी विचर के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों के अन्तर का सूचकांक है। चूंकि यह किसी विचर के दो अत्यन्तिक मूल्यों पर आधारित होता है और मध्यवर्ती मूल्यों की परिवर्तिता के विषय में कुछ नहीं बताता, इसे प्रकीर्णन का विश्वसनीय माप नही समझा जाता है। किसी भी एक सिरे पर मात्र एक मूल्य परास को पर्याप्त रूप से प्रभावित कर सकता है। उदाहरणार्थ, किसी कक्षा में एक छात्र को छोड़कर शेष सभी के अंक 40 और 78 के मध्य हैं और उस अकेले व्यक्ति के अंक 100 हैं। यदि 100 को भी गिना जाए तो परास 60 होगा और उस एक व्यक्ति के अंकों को छोड़कर शेष का परास मात्र 38 होगा। अतः 60 का यह वास्तविक परास भ्रामक है। परास एक प्रतिदर्श से दूसरे प्रतिदर्श में काफी भिन्न हो सकते हैं जब कि दोनों प्रतिदर्श एक ही समष्टि का प्रतिनिधित्व करते हैं। वास्तव में यह किसी प्रकीर्णन का एक तत्काल या सरसरी माप है , जिसके समर्थन के लिए अधिक प्रतिनिधि मापों की आवश्यकता होती है।

14.6 चतुर्थक विचलन की अवधारणा

परास मापने के पैमाने पर वह दूरी अथवा अन्तराल है जिसके अन्तर्गत शत प्रतिशत प्राप्तांक समा जाते हैं। परास की परिसीमा यह है कि यह मात्र दो अन्त्य मूल्यों पर ही आधारित होता है। परन्तु प्रकीर्णन के कुछ माप ऐसे भी हैं जो इन दो अत्यन्तिक मूल्यों से स्वतंत्र अथवा निराश्रित हैं। इनमें सर्व सामान्य माप चतुर्थक विचलन होता है जो उस अन्तराल पर आधारित होता है जिसमें किसी बंटन के बीच के 50% प्राप्तांक आते हैं। चतुर्थक विचलन के विषय में बातचीत करने से पूर्व हमें चतुर्थकों का अर्थ स्पष्ट रूप से जानना चाहिए।

चतुर्थक : आप जानते हैं कि माध्यिका मापन के पैमाने का वह बिन्दु है जो बन्टन की सम्पूर्ण बारम्बारताओं को दो बराबर भागों में बांट देता है। इसी प्रकार चतुर्थक मापने के पैमाने पर वह बिन्दु है जो बंटन की समस्त बारम्बारताओं को चार समान भागों में बांट देते हैं। चतुर्थकों को Q_1, Q_2 तथा Q_3 के रूप में लिखा जाता है। Q_2 तथा माध्यिका वस्तुतः एक ही होते हैं। पैमाने पर वह बिन्दु जो बारम्बारता के आधार पर माध्यिका से नीचे वाले भाग को दो समान भागों में बांटता है उसे निम्न चतुर्थक कहते हैं। इसे Q_1 से निर्दिष्ट किया जाता है । इसी प्रकार जब माध्यिका से ऊपर वाले दूसरे अर्ध भाग को बारम्बारता के आधार पर दो बराबर भागों में बांटा

जाता है, विचर के इस मान (मूल्य) को उच्च चतुर्थक कहते हैं, और इसे Q_3 से निर्दिष्ट किया जाता है। इन दोनों चतुर्थकों का अन्तर अर्थात् $Q_3 - Q_1$, अन्तः चतुर्थक परास को निरूपित करता है। इस अन्तर का आधा जो चतुर्थक विचलन कहलाता है, Q से द्योतित किया जाता है और निम्न सूत्र द्वारा परिकलित होता है :

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

14.6.1 चतुर्थक विचलन का परिकलन

इकाई 13 में आप दिए गए आँकड़ों की माध्यिका का परिकलन करना पहले ही सीख चुके हो। माध्यिका के परिकलन के लिए प्रयुक्त सूत्र है :

$$\text{माध्यिका} = L + \frac{N/2 - fb}{f} \times i$$

जहां L उस वर्ग अन्तराल का निचला सीमा बिन्दु है जिस अन्तराल में माध्यिका आती है। N समंकों की कुल संख्या का द्योतक है। fb माध्यिका वाले वर्ग-अन्तराल से पहले तक के अन्तरालों की संचयी बारम्बारता को निरूपित करता है। f, माध्यिका वाले वर्ग-अन्तराल की बारम्बारता का द्योतक है। तथा i माध्यिका वाले वर्ग-अन्तराल का आकार (परिमाण) या चौड़ाई है।

चतुर्थक विचलन (Q) के परिकलन के लिए प्रयुक्त सूत्र है :

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

जहां पर Q_1 तथा Q_3 क्रमशः प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक हैं। Q का मूल्य परिकलन करने के लिए पहले हमें Q_1 तथा Q_3 के मूल्यों का परिकलन करना चाहिए। Q_1 तथा Q_3 मालूम करने के लिए हमें मापन पैमाने पर उन बिन्दुओं को मालूम करना होगा जहां तक क्रमशः 25% तथा 75% समंक आते हैं। Q_1 तथा Q_3 मालूम करने की प्रक्रिया वही है जो माध्यिका मालूम करने की है। अन्तर केवल इतना है कि माध्यिका के लिए हम N/2 समंकों को ध्यान में रखते हैं जबकि Q_1 तथा Q_3 के लिए हमें क्रमशः N/4 तथा 3N/4 समंकों को ध्यान में रखना पड़ेगा। आइये निम्न उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरणः गणित की एक कक्षा के 36 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त समंक नीचे दी गई तालिका में दर्शाए गए हैं। इन समंकों का चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

तालिका 14.1

समंक (C.I)	बारम्बारता (f)	cf
80 - 84	1	36
75 - 79	2	35
70 - 74	2	33
65 - 69	5	31
60 - 64	12	26
55 - 59	7	14
50 - 54	5	7
45 - 49	2	2

स्तम्भ 1 में हमने समंकों को लिखा है , स्तम्भ 2 में बारम्बारता को तथा स्तम्भ 3 में संचयी बारम्बारता को रखा है। संचयी बारम्बारता नीचे से ऊपर की तरफ लिखनी शुरू की है।

यहाँ N=36, Q_1 निकालने के लिए हमें N/4 = 36/4 = 9 केस लेने हैं , तथा Q_3 निकालने के लिए हमने

$$3N/4 = \frac{3 \times 36}{4} = 27 \text{ केसों को लेना है।}$$

स्तम्भ तीन में देखने से पता चलता है कि 9 समंक 55 - 59 वाले वर्ग-अन्तराल में आएंगे जिसकी वास्तविक सीमाएं 54.5 तथा 59.5 हैं। अतः Q_1 का स्थान 54.5 - 59.5 वाले वर्ग-अन्तराल में होगा। Q_1 का मान (मूल्य) इस प्रकार निकाला जाएगा

$$Q_3 = L + \frac{N/4 - fb}{f} \times i$$

$$= 54.5 + \frac{9-7}{7} \times 5$$

$$Q_3 = 54.5 + 10/7 = 54.5 + 1.43$$

$$Q_3 = 55.93$$

Q_3 की गणना करने के लिए, cf = 27 वर्ग-अन्तराल 65-69 में पड़ेगी जिसकी असली सीमाएं 64.5 - 69.5 है। अतः Q_3 वर्ग अन्तराल 64.5 - 69.5 में होगा और इस का मूल्य इस प्रकार निकाला जाएगा :

$$Q_3 = L + \frac{3\,N/4 - fb}{f} \times i$$

$$= 64.5 + \frac{27-26}{5} \times 5 \quad = 64.5 + 1 = 65.5$$

इस प्रकार, $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{65.50 - 55.93}{2}$

$$Q = 9.57/2 = 4.78$$

14.6.2 चतुर्थक विचलन की व्याख्या

आइए पहले प्रकीर्णन के माप के रूप में चतुर्थक विचलन के उपयोग व उस की त्रुटियों या सीमाओं की विवेचना करें। चतुर्थक विचलन का परिकलन करना तथा उसकी व्याख्या करना काफी सरल है। चूंकि यह दो अत्यन्तिक मूल्यों पर आश्रित नही है अतः परास की अपेक्षा प्रकीर्णनक यह अधिक विश्वसनीय तथा अच्छा निरूपक या द्योतक है। जहां भी केन्द्रीय प्रवृति के माप के रूप में माध्यिका को वरीयता दी जाती है, वहीं पर प्रकीर्णन के माप के रूप में चतुर्थक विचलन (Q) को भी वरीयता दी जाती है। तथापि, माध्यिका की भान्ति Q भी बीजीय (बीजगणितीय) निरूपण के अधीन नहीं आ सकता। क्योंकि इसके परिकलन में बन्टन के सभी मूल्यों (मानों) को ध्यान में नहीं रखा जाता।

चतुर्थक विचलन के मूल्य की व्याख्या करते समय यह अच्छा होगा यदि माध्यिका, Q_1 तथा Q_3 के मूल्यों को भी ध्यान में रखा जाए । यदि Q का मान (मूल्य) अधिक होगा तो प्रकीर्णन अधिक होगा परन्तु यह मूल्य मापन के पैमाने पर निर्भर करता है। Q के विभिन्न मूल्य उसी अवस्था में तुलनीय होते हैं जबकि मापन का पैमाना एक हो। अधिकतम 20 में से समंकों पर परिकलित Q की तुलना अधिकतम 50 समंकों में से समकों पर निकाले गए Q से नहीं की जा सकती। यदि माध्यिका तथा Q दोनों मालूम हों तो हम कह सकते हैं कि 50% समंकों माध्यिका – Q, तथा माध्यिका + Q के मध्य होंगे। ये सभी समंक कुल समंकों के बीच के 50%

होते हैं। यहाँ पर हमें मात्र बीच के 50 प्रतिशत समंकों के परास के विषय में ज्ञान होगा। नीचे के 25 % समंकों तथा ऊपर के 25 % समंकों के बन्टन के विषय में Q से हमें कोई ज्ञान नहीं हो सकता। कई बार हमें अत्यन्तिक मूल्यों के विषय में कोई ज्ञान नहीं होता है। ऐसी अवस्था में हमारे सामने मात्र यही विकल्प होता है कि हम केन्द्रीय प्रवृति तथा प्रकीर्णन के माप के रूप में माध्यिका तथा चतुर्थक विचलन का परिकलन करें ।

माध्यिका तथा चतुर्थक विचलन की सहायता से हम बन्टन की सममिति तथा वैषम्य के विषय में कुछ अनुमान लगा सकते हैं। इसलिए आइए , बन्टन की सममिति तथा इसके वैषम्य के विषय में कुछ जानें।

सममित तथा विषम बन्टन: किसी बन्टन को सममित कह सकते हैं यदि सभी बारम्बारताऐं केन्द्रीय प्रवृति के माप के दोनों और सममित रीति से बंटी हुई हैं। दूसरे शब्दों में हम कहेंगे कि बन्टन सममित है यदि केन्द्रीय प्रवृति के माप के दोनों ओर समान दूरी वाले बिन्दुओं पर समान बारम्बारताऐं हों।

उदाहरण 2 : ज्ञात कीजिए कि क्या निम्नलिखित बन्टन सममित है अथवा नहीं।

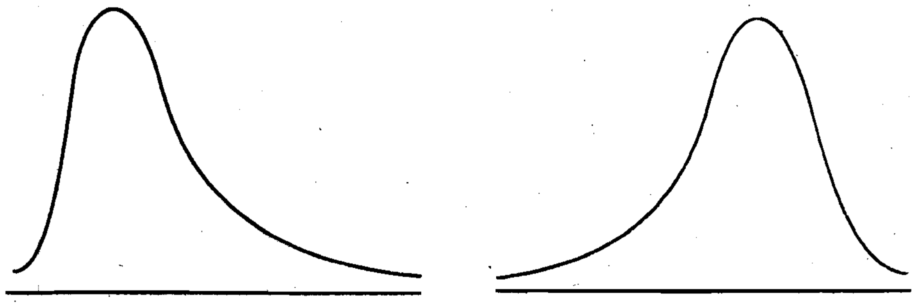
समंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बारम्बारता	1	2	2	4	5	8	5	4	2	2	1

उपर्युक्त उदाहरण में केन्द्रीय प्रवृति के निरूपक, माध्य तथा माध्यिका (दोनों) 5 हैं। यदि हम 5 के दोनों ओर के मूल्यों की बारम्बारताओं की तुलना करें तो हमें पता चलेगा कि 4 और 6; 3 व 7, 2 और 8, 1 और 9, तथा 0 और 10 सभी मूल्यों (समंकों) की बारम्बारताएं एक समान हैं । अतः यह बन्टन पूर्ण रूप से सममित है।

एक सममित बन्टन के माध्य तथा माध्यिका समान होते हैं तथा माध्यिका दोनों चतुर्थकों (Q_1 तथा Q_3) से समान दूरी पर होती है। अर्थातः Q_3 – माध्यिका = माध्यिका – Q_1.

या 2 × मध्यिका = $Q_3 - Q_1$

यदि कोई बन्टन सममित नही हैं तो सममिती से उसका अलगाव या विचलन, वैषम्य का द्योतक होगा। वैषम्य इस बात का द्योतक है कि वक्रता एक सिरे की अपेक्षा दूसरें सिरे की ओर अधिक है। अतः वक्रता की पूंछ एक ओर लम्बी होगी। यदि लम्बी पूंछ दाई ओर होगी तो इस वैषम्य को धनात्मक कहेंगे और यदि लम्बी पूंछ बाई ओर होगी तो वैषम्य को ऋणात्मक कहेंगे। निम्न चित्र 14.1 धनात्मक तथा ऋणात्मक वक्रता को दर्शाती है।



(a) *(b)*

(अ) धनात्मक वैषम्य (ब) ऋणात्मक वैषम्य

चित्र 14.1

एक धनात्मक वैषम्य वाले वक्र के संदर्भ में:

(Q_3 – माध्यिका), (माध्यिका – Q_1) से अधिक होगा या Q_3 – माध्यिका > माध्यिका – Q_1

एक ऋणात्मक वैषम्य वाले वक्र के संदर्भ में:

(Q_3 – माध्यिका), (माध्यिका – Q_1) से कम होगा या Q_3 – माध्यिका < माध्यिका – Q_1

बोध प्रश्न

[illegible]

14.7 शतमकों की अवधारणा

माध्यिका के संदर्भ में समग्र बारम्बारता को दो समान भागों में बांट दिया जाता है जबकि चतुर्थकों के संदर्भ में समग्र बारम्बारता को चार समान भागों में बांटा जाता है। इसी प्रकार शतमकों के संदर्भ में समग्र बारम्बारता को 100 बराबर भागों में बांटा जाता है। शतमकों को $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots P_{100}$ संकेतों से दर्शाया जाता है। शतमक पैमाने पर वे बिन्दु होते हैं जो समग्र बारम्बारता को 100 बराबर भागों में बांट देते हैं। अतः P_1 का अर्थ है कि इससे नीचे 1 प्रतिशत समंक आते हैं। इसी प्रकार P_2 वह बिन्दु है कि इसके नीचे 2 प्रतिशत समंक आते हैं, इत्यादि। जैसे पहले बताया गया है माध्यिका को P_{50} से निरूपित किया जा सकता है और दोनों चतुर्थकों (Q_1 तथा Q_3) को क्रमशः P_{25} तथा P_{75} से निरूपित किया जाता है। इसी प्रकार प्रथम, द्वितीय, तृतीय इत्यादि दशमकों को P_{10}, P_{20}, P_{30} आदि से निरूपित किया जाता है।

14.7.1 शतमकों का परिकलन

शतमकों का परिकलन करने के लिए हमें मापन पैमाने पर उन बिन्दुओं को मालूम करना पड़ता है जिनके नीचे दिए गए प्रतिशत समंक आते हैं। शतमक परिकलन की विधि चतुर्थक परिकलन की विधि के समान होती है। जैसेः

$$P_{10} = L + \frac{10N/100 - fb}{f} \times i$$

$$P_{20} = L + \frac{20N/100 - fb}{f} \times i$$

इत्यादि

उदाहरण 3 : आइए तालिका 14.1 में दिए गए दत्तों के आधार पर P_{10} तथा P_{20} निकालें। इस तालिका में गणित की कक्षा के 36 विद्यार्थियों के समंक दिए गए हैं। यहां पर N = 36 है। अतः P_{10} के परिकलन के लिए हमें 10N/100 या 3.6 समंक लेने हैं। वर्ग-अन्तराल 45-49 तक की संचयी बारम्बारता 2 है तथा 50-54 तक के वर्ग-अन्तरालों की संचयी बारम्बारता 7 है। स्पष्टतः 3.6 समंक 49.5 - 54.5 वाले वर्ग-अन्तराल में आएंगे। अतः

$$P_{10} = 45.5 + \frac{3.6 - 2}{5} \times 5$$

$$= 49.5 + 1.6$$

$$= 51.10$$

P_{20} का परिकलन करने के लिए हमें 20N/100 या 7.2 समंक चाहिए।

तालिका को देखने से पता चलता है कि 50 - 54 वाले वर्ग-अन्तराल तक संचयी बारम्बारता 7 है तथा 55 - 59 वाले वर्ग-अन्तराल तक संचयी बारम्बारता 14 है। स्पष्टतः 7.2 समंक 55 - 59 वाले वर्ग-अन्तराल अन्दर तक पड़ेंगे। इसकी वास्तविक सीमाएँ 54.5 से 59.5 तक होती है। अब

$$P_{10} = 54.5 + \frac{7.2 - 7}{7} \times 5$$

$$= 54.5 + 1/7$$

$$= 54.5 + 0.14 = 54.64$$

इकाई 12 में आपने संचयी बारम्बारता वक्र अथवा ओजाइव की रचना करनी सीखी है जहां पर Y अक्ष पर संचयी बारम्बारता के साथ साथ संचयी प्रतिशत बारम्बारता का प्रयोग किया गया है। ओगाइव की सहायता से आप बिना परिकलन किए किसी भी दिए गए शतमक का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं।

14.7.2 शतमकों की व्याख्या

शतमकों का प्रयोग प्रायः परीक्षा के समंकों की व्याख्या के लिए किया जाता है। किसी भी मानकीकृत परीक्षण के शतमक मानक परीक्षण पुस्तिका (test mannual) में दिए हुए होते हैं, ताकि परीक्षण द्वारा प्राप्त परिणामों की व्याख्या ठीक प्रकार से की जा सके। यदि किसी परिक्षार्थी का शतमक क्रम (Percentile rank) 60 है तो हमें तुरन्त पता चल जाता है कि कुल विद्यार्थियों में से 60% विद्यार्थियों के अंक उस विद्यार्थी से कम हैं। यदि किसी व्यक्ति का केवल समंक ही मालूम हो तो उस के सापेक्ष निष्पादन के विषय में कुछ भी पता नही चलेगा। वास्तव में उसके निष्पादन से सम्बन्धित निर्णय उस समूह के अन्य सदस्यों के निष्पादन के संदर्भ में लिया जा सकता है जिसका वह एक सदस्य है , तथापि संचयी प्रतिशतता वक्र की सहायता से हम किसी व्यक्ति का शतमक क्रम मालूम कर सकते हैं। और उस आधार पर उसके निष्पादन के बारे में निर्णय लिया जा सकता है।

14.7.3 शतमकों की सीमाएं

शतमकों से किसी व्यक्ति की विषय विशेष में प्रवीणता (Mastery) को नही आंका जा सकता; क्योंकि उस का शतमक क्रम किसी कम प्रवीणता वाले समूह में काफी ऊँचा हो सकता है जबकि किसी अच्छे समूह में अपेक्षाकृत नीचे हो सकता है। इसके अतिरिक्त सामान्य क्रमों के संदर्भ में विभिन्न अन्तरालों पर शतमकों के अन्तर समान नहीं होते। उदाहरण के लिए: $P_{100} - P_{90}$ को $P_{50} - P_{40}$ से बराबरी नहीं की जा सकती। कुल निष्पादन में किसी विद्यार्थी का स्थान विभिन्न परीक्षणों में प्राप्त किए गए उसके शतमकों से नहीं निकाला जा सकता।

14.8 माध्य विचलन की अवधारणा

केन्द्रीय बिन्दु से किसी समंक की दूरी विचलन कहलाती है। किसी बन्टन के सभी मूल्य के विचरण का अध्ययन करने के लिए सबसे सरल विधि है कि केन्द्रीय प्रवृति के किसी विशेष बिन्दु से इन सभी मूल्यों के विचलनों का माध्य निकाल लिया जाए। प्रायः विचलन दिए गए बन्टन के माध्य से निकाला जाता है। अतः अंकगणितीय माध्य से सभी मूल्यों के विचलनों के औसत को "माध्य विचलन" या औसत विचलन कहते हैं।

किसी मापन पैमाने पर केन्द्रीय प्रवृति का माप एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके दोनों ओर काफी मूल्य हों। अतः इस बिन्दु से विचलन दोनों दिशाओं में होंगे। या यह कहे कि विचलन धनात्मक और ऋणात्मक दोनों होंगे। यदि किसी समंक को X से निरूपित करें और माध्य को M से, तब (X – M) माध्य से किसी समंक के विचलन को निरूपित करेगा। जहां माध्य समंक से बड़ा होगा तो विचलन ऋणात्मक होगा। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में माध्य की परिभाषा के आधार पर इन विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य आएगा, क्योंकि केन्द्र बिन्दु से दोनों ओर के विचलन समान होते हैं। परन्तु इस समस्या से निपटने के लिए इन विचलनों के निर्पेक्ष मूल्य ले लिए जाते है, अर्थात $|X - M|$ इसका अर्थ है कि विचलन के ऋणात्मक या धनात्मक चिन्ह पर ध्यान नही दिया जाता तथा सभी विचलनों को धनात्मक माना जाता है । अतः

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma|X - M|}{N}$$

जहां X = कोई समंक, M = माध्य, तथा N = समग्र समूह या समंकों की संख्या

14.8.1 माध्य विचलन का परिकलन

इकाई 13 में आपने माध्य ज्ञात करने के कुछ उदाहरण पढ़े। आइए आपकी सुविधा के लिए उन्हीं उदाहरणों को फिर ध्यान में रखें।

अवर्गीकृत दत्तों के लिए माध्य विचलन का परिकलनः

उदाहरण 4 नीचे दिए गए समंकों का माध्य विचलन ज्ञात करें।

25,36,18,29,30,41,49,26,16,27

उपर्युक्त समंकों का माध्य 29.7 मालूम किया गया था। माध्य विचलन परिकलित करने के लिए हम पहले स्तम्भ में समंकों को लिखते हैं तथा दूसरी स्तम्भ में माध्य से इन समंकों का विचलन। तीसरे स्तम्भ में इन विचलनों का निर्पेक्ष मान लिखते हैं।

तालिका 14.2

X	X - M	¦X - M¦
25	– 4.7	4.7
36	+ 6.3	6.3
18	– 11.7	11.7
29	– 0.7	0.7
30	+ 0.3	0.3
41	+11.3	11.3
49	+19.3	19.3
26	– 3.7	3.7
16	– 13.7	13.7
27	–2.7	2.7
297		योग = 74.4

नोटः यदि आपको बीजगणित का थोड़ा सा ज्ञान भी है तो आप देखेंगे किः

$\Sigma (X - M) = 0$ (शून्य) । स्तम्भ दो के अंकों का योगफल ज्ञात करने पर यह स्पष्ट हो जाता है

हम जानते हैं कि

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma|X - M|}{N}$$

$$\text{अतः माध्य विचलन} = \frac{74.4}{10} = 7.44$$

वर्गीकृत दत्तों का माध्य विचलन निकालना

उदाहरण 5: निम्नलिखित बारम्बारता बंन्टन के लिए माध्य विचलन परिकलित कीजिए।

तालिका 14.3

CI	f
10 - 14	4
15 - 19	6
20 - 24	8
25 - 29	14
30 - 34	10
35 - 39	5
40 - 44	3

इकाई 13 में उपर्युक्त बंटन का माध्य 26.7 निकाला गया था।

यहां स्तम्भ 1 में हम वर्ग-अन्तराल लिखते हैं जो अवरोहण क्रम में दिए गए हैं। स्तम्भ 2 में हम उनकी क्रमशः बारम्बारता लिखते हैं। स्तम्भ 3 में हम वर्ग अन्तराल के मध्य बिन्दु लिखते हैं तथा कालम 4 में माध्य से वर्ग-अन्तरालों के मध्य बिन्दुओं के निर्पेक्ष विचलन लिखते हैं। इस विचलन को $|X'|$ से निरूपित करते हैं। स्तम्भ 5 में हम इन निर्पेक्ष विचलनों तथा बारम्बारता का गुणफल लिखते हैं जिसे $|fx'|$ से निरूपित किया जाता है। ये सभी नीचे तालिका 14.4 में दर्शाए गए हैं।

तालिका 14.4

CI	f	मध्य बिन्दु	$\|X'\|$	$\|fx'\|$
40 - 44	3	42	15.3	45.9
35 - 39	5	37	10.3	51.5
30 - 34	10	32	5.3	53.0
25 - 29	14	27	0.3	4.2
20 - 24	8	22	4.7	37.6
15 - 19	6	17	9.7	58.2
10 - 14	4	12	14.7	58.8
	50			309.2

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma|X-M|}{N} = \frac{309.2}{50} = 6.18$$

14.8.2 माध्य विचलन की व्याख्या

सर्वप्रथम हमारे लिए यह जानना आवश्यक है कि प्रकीर्णन के माप के रूप में माध्य विचलन का कहाँ और कब उपयोग करना चाहिए। माध्य विचलन प्रकीर्णन का सर्वाधिक सरल माप है जो किसी दिए गए बंटन के सभी मूल्यों पर आधारित होता है। वह व्यक्ति जो साख्यिकी का अच्छा ज्ञाता भी नही है, वह भी इसे आसानी से समझ सकता लेता है। परन्तु इसकी कुछ सीमाएं या त्रुटियाँ भी हैं। पहली, क्योंकि यह विचलनों के निर्पेक्ष मूल्यों को ही ध्यान में रखता है (बिना यह देखे कि यह विचलन धनात्मक है अथवा ऋणात्मक), अतः यह गणित की संक्रियाओं की दृष्टि से बोझिल सा लगता है। अतः इसे विचरण के मात्र वर्णात्मक माप के रूप में ही प्रयोग किया जाता है।, दूसरे, यह अत्यन्तिक मूल्यों से प्रभावित हो जाता है। परन्तु यह प्रभाव प्रकीर्णन के कुछ अन्य मापों से कम है जो सभी मूल्यों के आधार पर निकाले जाते हैं।)

माध्य विचलन की व्याख्या के लिए यह अच्छा होगा यदि इसे माध्य तथा समूह संख्या के साथ देखा जाए । माध्य इसलिए आवश्यक है क्योंकि माध्य और माध्य विचलन एक ही मापन पैमाने पर क्रमशः एक बिन्दु और उस बिन्दु से दूरी को निरूपित करते हैं। माध्य के बिना माध्य विचलन की व्याख्या नही हो सकती क्योंकि अन्यथा मापन पैमाने अथवा मापन इकाई के विषय में कोई संकेत नही मिलेगा। समूह संख्या इसलिए महत्त्वपूर्ण है क्योंकि प्रकीर्णन माप इस पर आश्रित होती है। यदि समूह संख्या कम होगी तो इस माप के अधिक होने की सम्भावना अधिक होगी। उपर्युक्त दो उदाहरणों में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए।

	माध्य विचलन	माध्य	N
उदाहरण 4	7.44	29.7	10
उदाहरण 5	6.18	26.7	50

पहले उदाहरण में माध्य विचलन, माध्य का लगभग 25% है जबकि दूसरे उदाहरण में इससे कुछ कम है। परन्तु पहली अवस्था में सम्भवतः इस लिए अधिक हो सकता है क्योंकि इसमें समूह संख्या कम है। अतः ऊपर उदाहरणों में परिकलित माध्य विचलन लगभग एक जैसे प्रकीर्णन के द्योतक हैं।

14.9 मानक विचलन की अवधारणा

प्रकीर्णन के विभिन्न मापों में सबसे अधिक प्रयोग में आने वाला माप मानक विचलन है। यह सबसे महत्त्वपूर्ण भी है, क्योंकि यही एक ऐसा माप है जिस पर बीजगणितीय प्रक्रियाओं का उपयोग हो सकता है। इसके परिकलन में भी बंटन के सभी मूल्यों के माध्य से विचलनों को ध्यान में रखा जाता है। तथापि माध्य से सभी मूल्यों (अंकों) के विचलनों का योग(अर्थात $\Sigma(X - M)$) सदैव शून्य होगा। माध्य विचलन की गणना में इस समस्या से निपटने के लिए माध्य से विचलनों के निर्पेक्ष मूल्य लिए गए थे। और इस प्रकार $\Sigma|X - M|$ परिकलित किया गया था। इससे निपटने के लिए दूसरा विकल्प यह है कि विचलनों के वर्गफल निकाल लिए जाएँ क्योंकि किसी भी संख्या का वर्गफल (चाहे वह धनात्मक हो या ऋणात्मक) सदैव धनात्मक ही होगा। इसके अतिरिक्त किसी विचलन को इसके वर्गफल में परिवर्तित करने से माप अधिक संवेदनशील हो जाता है, क्योंकि किसी भी मूल्य में आया कोई भी परिवर्तन इसे *काफी सीमा तक प्रभावित करता है। अतः मानक विचलन की गण्ना में* **विचलनों को मूल रूप में लेने की बजाए माध्य से विचलन के प्रत्येक मूल्य के वर्गफल निकाल लिए जाते हैं। विचलनों के वर्गफलों का माध्य, प्रसरण कहलाता है तथा वर्गफल विचलन माध्य के वर्गमूल को मानक विचलन कहते हैं। मानक विचलन के लिए प्रयुक्त सूत्र है :**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X-M)^2}{N}}$$

जहां, X = विचर का मूल्य, M = बंटन का माध्य तथा N = समूह के समंकों की संख्या

14.9.1 मानक विचलन का परिकलन

आइए वर्गीकृत तथा अवर्गीकृत दोनों प्रकार के दत्तों के मानक विचलन निकालने के लिए अलग-अलग उदाहरण लें।

अवर्गीकृत दत्तों का मानक विचलन निकालना

उदाहरण 6 नीचे दिए समंकों का मानक विचलन निकाले।

12, 15, 10, 8, 11, 13, 18, 10, 14, 9

चरण 1: माध्य निकालना : समंकों का योग 120 है।

$$\text{माध्य} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{120}{10} = 12$$

चरण 2: स्तम्भ 2 में प्रत्येक समंक के सामने विचलन का मूल्य (अर्थात् X – M) लिखें। यहां पर समंकों के विचलन माध्य 12 से निकालने हैं। अब आप देखेंगे कि विचलनों का योग Σ(X – M) शून्य होगा। सोचिए ऐसा क्यों है ? यदि ऐसा नहीं होता है तो परिकलन में कोई अशुद्धि है , उसे मालूम कीजिए तथा ठीक कीजिए।

चरण 3: प्रत्येक विचलन का वर्गफल निकालें तथा $(X-M)^2$ का मूल्य लिखते चलें जाएं (स्तम्भ 3 में प्रत्येक समंक से सामने) । विचलनों के परिकलित वर्गफलों का योग कीजिए।

$$\Sigma(X-M)^2 = 84$$

चरण 4: विचलनों के वर्गफलों का माध्य निकालें तथा उसके पश्चात् उस संख्या का वर्गमूल ज्ञात करें। प्राप्त परिणाम मानक विचलन होगा अर्थात् σ (सिगमा) होगा।

तालिका 14.5

समंक	X–M	$(X-M)^2$
12	0	0
15	3	9
10	– 2	4
08	– 4	16
11	– 1	1
13	1	1
18	6	36
10	– 2	4
14	2	4
9	– 3	9
120		84

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X-M)^2}{N}} = \sqrt{\frac{84}{10}}$$

$$\sigma = \sqrt{8.4} = 2.9$$

अतः अपेक्षित मानक विचलन 2.9 हुआ।

वर्गीकृत दत्तों का मानक विचलन निकालना

उदाहरण 7: निम्नलिखित बंटन का मानक विचलन निकालिए।

C l:	0-2	3-5	6-8	9-11	12-14	15-17	18-20
f:	1	3	5	7	6	5	3

यहां भी, पहला चरण माध्य ज्ञात करना है। जिसके लिए हमें वर्ग-अन्तराल (C1) का मध्य बिन्दु लेना होगा जिसे X' से निरूपित करेंगे। इसके पश्चात् fX′ निकालेंगे। M के लिए प्रयुक्त सूत्र ΣfX′/N होता है। दूसरा चरण प्रत्येक वर्ग-अन्तराल के मध्य बिन्दुओं (X′) से माध्य का विचलन मालूम करना होगा अर्थात (X′– M) जिसे x′ से निरूपित करेंगे। तीसरा चरण इन विचलनों का वर्गफल निकालना तथा इन वर्गफलों तथा इनकी संगत बारम्बारताओं का गुणनफल मालूम करना होगा।

अब $$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fX'^2}{N}}$$

उपयुक्त प्रश्न को हल करने के लिए पहले स्तम्भ में वर्ग अन्तराल (C1) लिखा जाता है, दूसरे स्तम्भ में बारम्बारताऐं (f), तीसरे स्तम्भ में वर्ग-अन्तरालों (C1) के मध्य बिन्दु X′ लिखे जाएंगे। चौथे कालम में गुणनफल fx′ लिखा जाएगा, पांचवें स्तम्भ में X′ का माध्य से विचलन (x′) लिखा जाएगा, छटे स्तम्भ में X′ का वर्गफल (x′²) लिखा जाएगा तथा 7वें स्तम्भ में गुणनफल fx′² लिखा जाएगा । ये सब इस उदाहरण 7 के संदर्भ में नीचे

तालिका 14.6 में दर्शाया गया है

Cl	f	X′	fX′	x′	x′²	fx′²
18-20	3	19	57	7.9	62.41	187.23
15-17	5	16	80	4.9	24.01	120.05
12-14	6	13	78	1.9	3.61	21.66
9-11	7	10	70	–1.1	1.21	8.47
6-8	5	7	35	-4.1	16.81	84.05
3-5	3	4	12	-7.1	50.41	151.23
0-2	1	1	1	-10.1	102.1	102.01
योग	30		333			674.70

$$\text{Mean} = \sqrt{\frac{\Sigma fX'}{N}} = \frac{333}{30} = 11.1$$

अतः मध्य बिन्दुओं से विचलन माध्य 11.1 से निकाले जाएंगे।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N}} = \sqrt{\frac{674.70}{30}} = \sqrt{22.49} = 4.75$$

अतः अपेक्षित मानक विचलन 4.74 हुआ ।

यहां पर आपने देखा होगा कि वास्तविक माध्य से लिए गए विचलन दशमल भिन्न में आते हैं, तथा x'^2 और fx'^2 के मान निकालना थोड़ा कठिन होता है। इस समस्या को दूर करने के लिए हम मानक विचलन निकालने की एक छोटी तथा सरल विधि का प्रयोग करते है।

इस विधि में वास्तविक माध्य से विचलन मालूम करने की बजाए हम विचलन एक कल्पित माध्य से निकालते है। फलस्वरूप मानक विचलन मालूम करने

का सूत्र भी कुछ परिवर्तित हो जाता है, जो इस प्रकार है

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

$$\text{या } \sigma = \frac{i}{N} \times \sqrt{N\Sigma fd^2 - (\Sigma fd)^2}$$

यहां पर i प्रत्येक वर्ग-अन्तराल की चौड़ाई को निरूपित करती है, N कुल समूह (समंकों) की संख्या तथा d मध्य बिन्दु की कल्पित माध्य से दूरी को वर्ग-अन्तराल की लम्बाई से भाग द्वारा प्राप्त होता है। इस विधि को सोपान विचलन विधि भी कहा जाता है।

मानक विचलन मालूम करें की सोपान विचलन विधि

इस विधि में स्तम्भ एक में CI (वर्ग-अन्तराल) , दो में f, तीन में d जिसका मूल्य $d = \frac{X' - AM}{i}$ है, लिखते है। तद्न्तर स्तम्भ चार में गुणनफल fd और स्तम्भ पांच में fd^2 लिखा जाता है। यह सब नीचे तालिका 14.7 में दर्शाया गया है।

तालिका 14.7

C.I	f	d	fd	fd^2
18-20	3	+ 3	9	27
15-17	5	+ 2	10	20
12-14	6	+ 1	6	6
9-11	7	0	0	0
6- 8	5	– 1	– 5	5
3- 5	3	– 2	– 6	12
0- 2	1	– 3	– 3	9
	30		11	79

यहां पर कल्पित माध्य , वर्ग-अन्तराल 19-11 का मध्य बिन्दु अर्थात् 10 माना गया है। अतः विचलन 10 से लिया गया है और 3 से (वर्ग-अन्तराल की माप) से विभाजित किया गया है।

अब $\sigma = 1/N \sqrt{N\Sigma fd^2 - (\Sigma fd)^2}$

$$= 3/30 \times \sqrt{30 \times 79 - (11)^2}$$

$$= 1/10 \times \sqrt{2370 - 121}$$

$$= 1/10 \times \sqrt{2249}$$

$$= 47.4/10$$

$$= 4.74$$

यहां भी, $\sigma = 4.74$

14.9.2 मानक विचलन की व्याख्या

आइए सबसे पहले प्रकीर्णन के माप के रूप में मानक विचलन के उपयोग व उसकी सीमाओं पर विचार करें। मानक विचलन प्रकीर्णन का सर्वाधिक उपयोग में लाया जाने वाला व महत्त्वपूर्ण माप है। सांख्यिकी में इसका स्थान केन्द्रीय है। माध्य विचलन की भान्ति यह भी बंटन के सभी मानों (मूल्यों) पर आधारित होता है। परिवर्तिता का यह प्रधान माप है, क्योंकि इस पर बीजगणितीय प्रक्रियाएं लागू हो सकती है तथा इसका उपयोग सहसम्बन्धात्मक कार्य में किया जाता है। इसके अतिरिक्त यह बहुत से अन्य साख्यिंकीय विश्लेषणों के लिए भी अनिवार्य है। इसकी एक मात्र सीमा अथवा त्रुटि यह है कि यह अन्तय मूल्यों द्वारा काफी प्रभावित हो जाता है । इस माप के मूल्यों की व्याख्या करने के लिए हमें यह समझना चाहिए कि इसका मूल्य जितना अधिक होगा समंक उतने ही अधिक माध्य से दोनों ओर फैले हुए होंगे।

माध्य विचलन की व्याख्या की भान्ति मानक विचलन की व्याख्या के लिए भी अपेक्षा है कि माध्य (M) तथा समूह संख्या (N) को सदैव ध्यान में रखना चाहिए।

उदाहरण 6 तथा 7 में σ M तथा N के अपेक्षित मूल्य नीचे दिए गए है :

	M	σ	N
उदाहरण 6	12.0	2.90	10
उदाहरण 7	11.1	4.74	30

यहां पर, उदाहरण 7 में प्रकीर्णन उदाहरण 6 की अपेक्षा अधिक है। इसका अर्थ है कि उदाहरण 7 में दिए गए समंक उदाहरण 6 के समंकों की अपेक्षा माध्य के दोनों ओर अधिक दूरी तक फैले हुए हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तरों के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से अपने उत्तर मिलाइए।

3 i) उदाहरण 7 में $\Sigma x'$ शून्य क्यों नहीं है ?

....

....

....

....

....

ii) मानक विचलन की परिभाषा दीजिए और नीचे दिए गए प्राप्तांकों के लिए मानक विचलन का परिकलन कीजिए।

15, 22, 17, 45, 32, 20, 35, 28, 40, 37

....

....

....

....

iii) नीचे दिए गए बारम्बारता बन्टन के लिए मानक विचलन की गणना कीजिए

CI:	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84
f:	2	7	10	12	6	[illegible]

14.10 कक्षा में मानक विचलन, चतुर्थक विचलन, तथा शतमकों के उपयोग

कक्षा की स्थिति में हमें बहुधा सांख्यिकी का उपयोग करना पड़ता है। तथापि, ऐसी स्थिति में या तो अध्यापक इन सांख्यकों का (Statistic) परिकलन करने से बचता है और यदि परिकलन करता भी है तो बिना उसके औचित्य या उपयुक्तता पर का विचार किए प्रकीर्णन अथवा केन्द्रीय प्रवृति के सरलतम मापों का परिकलन कर लेता है। जहां आवश्यकता हो अध्यापक को सांख्यक का उपयोग अवश्य करना चाहिए और उस स्थिति विशेष के लिए यह उपयुक्त होना चाहिए। बालक की प्रगति का विवरण देते समय, अध्यापक प्रायः विषय के अनुसार मात्र समंक लिख देते हैं। कक्षा के विद्यार्थियों की उपलब्धि के सन्दर्भ में कोई सूचना नहीं दी जाती। इस स्थिति से निपटने के लिए अध्यापक शतमक श्रेणी के रूप में विद्यार्थियों के व्यक्तिगत पार्श्विका तैयार कर सकता है। इन पार्श्विकाओं की सूचना वह बालक के माँ-बाप को भेज सकता है। इनसे माता पिता अपने बच्चों की उनकी कक्षा में सापेक्ष स्थिति से अवगत हो जाएंगे और बच्चों की प्रगति को भली भान्ति समझ सकेंगे।

उदाहरण 8: किसी नवीं कक्षा के विद्यार्थी के वार्षिक परीक्षा में समंक नीचे दिए गए हैं

विषय	अंग्रेजा	हिन्दी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान	योग
पूर्णांक	100	100	100	100	100	500
समंक	55	60	70	63	58	306

उपर्युक्त दत्तों के आधार पर वस्तुनिष्ठ मूल्यांकन करना कठिन होगा। इसके आधार पर हमें विद्यार्थी के मात्र प्रतिशत समंकों का ही पता चलता है। तथापि, यदि अध्यापक सभी विषयों के समंकों के साथ साथ शतमकों को भी बता दें तो यह अधिक औचित्यपूर्ण तथा सार्थक होगा। इस विद्यार्थी के प्रत्येक विषय के समंकों के साथ शतमक क्रम भी नीचे दिए गए हैं।

विषय	अंग्रेजी	हिन्दी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान	योग
समक	55	60	70	63	58	306
शतमक क्रम (PR)	50	54	60	55	53	55

कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या 44 है।

यहां पर, समूह के अन्दर प्रत्येक विषय में उस बालक की सापेक्ष स्थिति का ज्ञान हो जाता है। दूसरे, इसके आधार पर उस बालक के वर्तमान निष्पादन की उसके पहले तथा आगे आने वाले निष्पादनों से तुलना की जा सकती है।

प्रकीर्णन के माप अध्यापक की सहायता कक्षा के विद्यार्थियों की परिवर्तिता जानने में कर सकते हैं, तथा इस प्रकार अध्यापक ऐसे व्यक्तिगत अनुदेश नियोजित कर सकता है जो वंचित और पिछड़े बालकों तथा मेधावी छात्रों सभी के लिए सहायक या उचित हों।

अलग अलग व्यक्तियों के व्यक्तिगत समंकों की तुलना के लिए सबसे अच्छा तरीका यह है कि समंकों को मानक समंकों में परिवर्तित कर लिया जाए। इसी प्रकार यदि दो बंटनों की उनकी परिवर्तिता की दृष्टि से तुलना करनी हो तो परिवर्तिता गुणांक का उपयोग किया जा सकता है। मानक समंक तथा परिवर्तिता गुणांक पर नीचे के अंश में चर्चा की जा रही है।

मानक समंक : यदि किसी बंटन का माध्य और उसका मानक विचलन मालूम हों तो उस बन्टन के किसी दिए गए समंक को उस के मानक विचलन के गुणन के तथा माध्य से दूरी के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। ऐसे समंक को मानक अंक या Z - समंक कहा जाता है

$$Z = \frac{X - M}{\sigma}$$

इन मानक समंकों पर सभी बीजगणितीय प्रक्रियाएं लागू होती हैं क्योंकि इन समंकों को मापन के अनुपात स्केल के रूप में निरूपित किया जा सकता है। दिए गए किन्हीं भी दो समंकों की तुलना की जा सकती है यदि उन्हें Z - समंकों या मानक समंकों में परिवर्तित कर लिया जाए। यदि विभिन्न विषयों के यथा प्राप्त समंकों को मानक समंकों में परिवर्तित कर दें तो संयुक्त समंकों की गणना भी की जा सकती है।

परिवर्तिता गुणांक

यदि बंटनों या दो श्रेणियाँ को एक ही इकाई में अभिव्यक्त किया गया हों और दोनों के लगभग एक जैसे औसत मूल्य हों तो इनके मानक विचलनों की प्रत्यक्ष रूप से तुलना की जा सकती है। परन्तु, यदि मापन इकाई अलग अलग हो या दोनों बंटनों के औसत मूल्य अलग अलग हों और उनका अन्तर काफी हो तो प्रत्यक्ष तुलना के परिणाम ठीक नहीं होंगे।

उदाहरण 9 कक्षा सात "अ" के विद्यार्थियों की ऊंचाइयां इन्चों में मापी गई है तथा कक्षा सात "ब" के विद्यार्थियों की सैन्टीमीटरों में। दोनों समूहों के मानक विचलन इस प्रकार हैं।

कक्षा	σ
VII A	5
VII B	12

ये दोनों मानक विचलन सीधे रूप में जब तक तुलनीय नही हैं जब तक कि इन्हें एक ही इकाई में परिवर्तित नही कर दिया जाता या किसी ऐसे रूप में नहीं लिख दिया जाता जिसमें इकाई सम्मिलित ही नहीं होती।

इसके लिए हमें परिवर्तिता का एक ऐसा माप चाहिए जो इकाइयों पर आश्रित न हो परन्तु औसतों पर आधारित हो। ऐसे माप को परिवर्तिता गुणांक अथवा सापेक्ष मानक विचलन कहते हैं और जिसे प्रतिशत के रूप में अभिव्यक्त किया जाता है। इसका सूत्र निम्न है :

$$CV = \frac{100 \times \sigma}{M}$$

चूंकि CV (या परिवर्तिता गुणांक) दो राशियों का अनुपात है जो और M है और जिनकी इकाइयां समान है, अतः CV किसी इकाई से स्वतन्त्र है। यह एक ऐसा मूल्य भी प्रदान करता है जो M (या माध्य) के सापेक्ष है।

अपवादिक परिवर्तिता

यदि किसी शैक्षिक परिस्थिति में CV का मान 5 % से कम या 35 % से अधिक हो तो इस से माध्य तथा SDs (मानक विचलन) के परिकलन की शुद्धता संदेहास्पद हो जाएगी, या सम्भव है उचित मापों का परिकलन ही नही किया गया हो । ऐसी अवस्थाओं के लिए विशेष विशलेषण तथा व्याख्या की आवश्यकता होती है।

14.11 सारांश

- वह गुण जो उस सीमा का सूचक है अर्थात् यह बताता हो कि किस सीमा तक किसी विचर के विभिन्न मूल्य केन्द्रीय मूल्य के चारों ओर फैले हुए हैं , प्रकीर्णन कहलाता है।
- प्रकीर्णन का माप मापन की पैमाने पर एक दूरी है।
- सामान्य रूप से प्रयोग में लाए जाने वाले प्रकीर्णन के माप है : परास, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन,तथा मानक विचलन। इन में से सरलतम माप परास है जबकि सबसे विश्वसनीय माप मानक विचलन है।
- मानक विचलन की आवश्यकता अन्य उच्च् स्तरीय सांख्यिकीय परिकलनों में पड़ती है।
- प्रकीर्णन के किसी विशेष माप को परिकलित करने से पूर्व यह सुनिश्चित करना आवश्यक है कि वही सांख्यक उस अवस्था के लिए उपयुक्त माप है।

14.12 अभ्यास कार्य

1. कक्षा को एक परीक्षण दीजिए, उस परीक्षण सम्बन्धी उत्तर पुस्तिकाओं को जांचिए। समंकों का उपयुक्त प्रकीर्णन माप मालूम कीजिए और प्राप्त सांख्यिकीय मूल्यों की व्याख्या कीजिए।
2. नीचे दिए गए बारम्बारता बंटन के आधार पर चतुर्थक विचलन व मानक विचलन मालूम कीजिए।

CI	f
90-99	3
80-89	4
70-79	8
60-69	12
50-59	6
40-49	3
30-39	1
20-29	0
10-19	3
	40

उपर्युक्त में से प्रकीर्णन का कौन सा माप अधिक उचित है ? यदि 10-19 वाले वर्ग-अन्तराल को सम्मिलित नहीं किया जाए उस अवस्था में मानक विचलन क्या होगा?

प्राप्त परिणामों की व्याख्या कीजिए।

14.13 चर्चा के बिन्दु

1 अपनी कक्षा अवस्थितियों में आप के पास बहुत सारे बंटन प्राप्त होंगे। उनमें कोई तीन बंटन छांटिए और उनके उपयुक्त प्रकीर्णन माप परिकलित कीजिए। इस प्रकार प्राप्त मापों के मूल्यों की व्याख्या कीजिए। प्रकीर्णन के 3 मापों, जिन्हें आपने ज्ञात किया है के औचित्य पर चर्चा करें तथा अपने अध्यापक के साथ उनकी व्याख्या करें।

2 अपने ट्यूटर के साथ प्रकीर्णन के मापों के विशिष्ट उपयोग पर , अपनी आवश्यकताओं को ध्यान में रख कर , चर्चा करें। इस बात पर भी चर्चा हो सकती है कि प्रकीर्णन के अनुसार अधिगम कार्यकलाप किस भान्ति नियोजित किया जाए।

14.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. i) चतुर्थक किसी विचर के वे मूल्य होते हैं जो कुल बारम्बारता को चार बराबर भागों में बांट देते हैं। Q_1 निचला या प्रथम चतुर्थक होता है , तथा Q_3 ऊपर का या तृतीय चतुर्थक।

चतुर्थक विचलन अर्ध अन्तर-चतुर्थक परास होता है जिसे Q से निरूपित किया जाता है

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ii) वैषम्य इस बात का द्योतक है कि वक्र एक ओर अधिक झुका हुआ है। दो प्रकार की विषम वक्रताऐं हैं (अ) धनात्मक रूप से विषम तथा (ब) ऋणात्मक रूप से विषम।

2. i) माध्य से सभी मूल्यों के निर्पेक्ष विचलन की औसत को माध्य विचलन कहते हैं

माध्य विचलन = 4.00

ii) माध्य = 40.75

माध्य विचलन = 11.125

3. i) उदाहरण 7 में $\Sigma X'$ शून्य इसलिए नही है क्योंकि यह C I के मध्य बिन्दुओं का माध्य से विचलनों का योग है जिसमें प्रत्येक वर्ग-अन्तराल की बारम्बारताओं को ध्यान में नही रखा गया है।

ii) मानक विचलन, माध्य से सभी मूल्यों के वर्ग फलित विचलनों की औसत का वर्ग मूल है।

मानक विचलन = 9.82

iii) मानक विचलन = 12.835

14.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Blommers, P. and Lindquist, E.F. (1959): *Elementary Statistical Methods,* Houghton Mifflin Company, Boston.

Garrett, H.E. (1956): *Elementary Statistics.* Longmans, Green & Co., New York.

Guilford, J.P. (1965): *Fundamental Statistics in Psychology and Education,* McGraw Hill Book Company, New York.

Hannagan, T.J. (1982): *Mastering Statistics,* The Macmillan Press Ltd., Surrey.

Lindgren, B.W. (1975): *Basic Ideas of Statistics,* Macmillan Publishing Co. Inc., New York.

Tate, M.W. (1955): *Statistics in Education,* The Macmillan Company, New York.

Walker, H.M. and Lev, J. (1965): *Elementary Statistical Methods,* Oxford & IBH Publishing Co., Calcutta.

Wine, R.L. (1976), *Beginning Statistics,* Winthrop Publishers Inc., Massachusetts.