इकाई 16 सहसंबंध - इसकी व्याख्या व महत्त्व

संरचना

16.1 प्रस्तावना

16.2 उद्देश्य

16.3 सहसंबंध की अवधारणा

16.4 सहसंबंध गुणांक

16.5 सहसंबंध गुणांक के मान का अधिकतम परास

16.6 सहसंबंध के प्रकार

- 16.6.1 धनात्मक, ऋणात्मक व शून्य सहसंबंध
- 16.6.2 सरल रेखीय व वक्र रेखीय सहसंबंध

16.7 सहसंबंध गुणांक की गणना करने की विधियाँ (अवर्गीकृत आंकड़े)

- 16.7.1 क्रम अन्तर सहसंबंध गुणांक
- 16.7.2 पीयरसेन का गुणन-आघूर्ण सहसंबंध गुणांक
- 16.7.3 पीयरसेन का गुणन-आघूर्ण सहसंबंध गुणांक (जब वर्गीकृत आंकड़े दिए हों)

16.8 सहसंबंध गुणांक की व्याख्या

16.9 सहसंबंध गुणांक की अनुचित व्याख्या

16.10 सहसंबंध गुणांक की मात्रा को प्रभावित करने वाले कारक

16.11 शैक्षिक मापन व मूल्यांकन में सहसंबंध की उपयोगिता तथा महत्व

16.12 सारांश

16.13 अभ्यास कार्य

16.14 चर्चा के बिंदु

16.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

16.16 कुछ उपयोगी पुस्तकें

16.1 प्रस्तावना

इससे पहली इकाइयों में हमने कुछ ऐसे सांख्यिकीय मापों के बारे में चर्चा की है,जिन्हें हमें केवल एक चर के लिए प्रयोग करते हैं , अर्थात केवल एक परिणामात्मक या संख्यात्मक चर से संबंधित बंटन । अब हम दो चरों के एक ही साथ विचरण की समस्या का वर्णन करने की विधि का अध्ययन करेंगे। वह आंकड़ें जो प्रत्येक व्यक्ति के केवल एक ही गुण (चर) के मापन से प्राप्त होते हैं उन्हें एक-चरीय बंटन कहते हैं। यदि प्रत्येक व्यक्ति के दो गुणों (चरों) के मापों के युग्म हमारे पास हों, तो दोनों का इकट्ठा प्रस्तुतीकरण द्विचरीय बंटन कहलाता है।

हमें बहुत सी परिस्थितियों में दो या दो से अधिक चरों के अध्ययन का अवसर मिलता है। उदाहरणतया, निम्नलिखित पाँच छात्रों के गणित व विज्ञान के अंकों पर विचार करें। यहाँ हर छात्र के x तथा y चरों पर समंक हैं जैसे गणित और विज्ञान में अतः इस बंटन को द्विचरीय बंटन कहते हैं।

छात्र	1	2	3	4	5
गणित में समंक (x)	40	17	29	36	25
विज्ञान में समंक (y)	38	16	30	32	24

यहाँ पर प्रत्येक छात्र के समंक दो विषयों (चरों) में हैं, x व y अर्थात गणित व विज्ञान में ; अतः इस बंटन को द्विचरीय बंटन कहा गया है।

इसी तरह , दो से अधिक विषय के समंकों का बंटन बहुचरीय बंटन कहलाता है। इस इकाई में हम द्विचरीय बंटनों का अध्ययन करेंगे। द्विचरीय बंटन में एक ही समूह के व्यक्तियों द्वारा दो चरों पर मापों के युग्म (समंकों के जोड़े) दिए जाते हैं।

16.2 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो जाएंगे कि :

- सहसंबंध को परिभाषित सकेंगे,
- सहसंबंध गुणांक को परिभाषित सकेंगे,
- विभिन्न प्रकार के सहसंबंधों को पहचान सकेंगे,
- आँकड़ों की प्रकृति व बंटन के अनुसार सहसंबंध गुणाँक गुणनफल की गणना कर सकेंगे,
- प्राप्त निष्कर्षों की व्याख्या करने में अर्थात सहसंबंध गुणाँक गुणनफल की व्याख्या कर सकेंगे,
- सहसंबंध गुणाँक की व्याख्या करने में आवश्यक सावधानी ले सकेंगे, और
- सहसंबंध की महत्ता का वर्णन कर सकेंगे।

16.3 सहसंबंध की अवधारणा

यह समझने के लिये कि दो चरों के आपसी सहसंबंध का क्या अर्थ है , हम खण्ड 16.1 में दिए गए उदाहरण का उपयोग करते हैं , अर्थात् 5 छात्रों के गणित व भौतिक विज्ञान में प्राप्त समंक। आपको प्रसतुत आँकड़े में किस प्रकार का ढ़ाँचा पता चलता है ? शायद आपने देखा है कि सामान्यतया जिन छात्रों ने गणित में अच्छे समंक प्राप्त किए हैं उन्होंने भौतिक विज्ञान में भी अच्छे समंक प्राप्त किए हैं और जो छात्र गणित में कमजोर हैं उसके भौतिक विज्ञान में भी कम समंक आये हैं। संक्षिप्त में , इस अवस्था में छात्रों की प्रवृत्ति दोनों विषयों में एक जैसे समंक प्राप्त करने की है। दोनों विषयों की उपलब्धि में संबंध है ; दूसरे शब्दों में , दोनों चर सहसंबंधित हैं , इसलिए एक साथ विचरण करते हैं।

यदि एक चर के परिवर्तन के साथ दूसरे चर में भी परिवर्तन दिखाई देता है , तो कहा जाता है कि दोनों चर सहसंबंधित हैं , और यह परस्पर सहसंबंध कहलाती है।

16.4 सहसंबंध गुणांक

दो चरों के आपसी संबंध की मात्रा (अंश) मापने के लिये सहसंबंध के एक सूचकांक का प्रयोग किया जाता है , और उसे सहसंबंध गुणाँक की संज्ञा दी जाती है।

सहसंबंध गुणाँक एक अकेली संख्या है जो यह बताती है कि दो चर किस सीमा तक संबंधित हैं , और किस सीमा तक एक में परिवर्तन दूसरे चर में परिवर्तन ला सकता है।

सहसंबंध गुणाँक का चिन्ह

सहसंबंध गुणाँक को हमेशा अंग्रेजी के अक्षर r व ρ (rho) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। चिन्ह 'ρ' गुणन–आघूर्ण सहसंबंध या कार्ल पीयरसन (Karl Pearson) को निरूपित करता है। और चिन्ह ρ (rho) क्रम-अन्तर सहसंबंध जिसे स्पीयरमेन का क्रम अंतर सहसंबंध गुणाँक कहा जाता है , को प्रदर्शित करता है।

16.5 सहसंबंध गुणाँक के मान का अधिकतम परास

दो चरों में सहसंबंध गुणाँक का मान का अधिकतम परास – 1 से +1 तक शून्य से जाता हुआ, होता है। इस गुणाँक के ±1 मान पूर्ण सहसंबंध को प्रदर्शित करते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) अपने उत्तरों को इस इकाई के अंत मे दिए गए उत्तरों से मिलाइए।

1. सहसंबंध को परिभाषित कीजिए ?

....

....

....

....

2. सहसंबध गुणांक से आप क्या समझते हैं ?

....

....

....

....

3. सहसंबध गुणॉक किस परास में विचरण कर सकता है ?

....

....

....

16.6 सहसंबंध के प्रकार

द्विचरीय बंटन में सहसंबंध

1. धनात्मक , ऋणात्मक और शून्य हो सकता है।

2. सरल रेखीय व वक्र रेखीय हो सकता है।

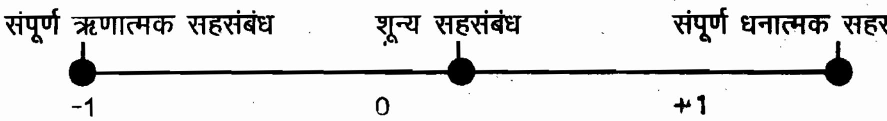
16.6.1 धनात्मक, ऋणात्मक व शून्य सहसंबंध

जब एक चर (x) में वृद्धि के साथ-साथ दूसरे चर (y) में भी संगत वृद्धि हो तो ऐसे सहसंबंध को धनात्मक सहसंबंध कहा जाता है। धनात्मक सहसंबंध का परास या विस्तार 0 से +1 तक होता है। अधिकतम ऊपरी सीमा +1 संपूर्ण धनात्मक सहसंबंध की द्योतक है।

संपूर्ण धनात्मक सहसंबंध यह दर्शाता है कि किसी एक चर में एक इकाई वृद्धि के साथ-साथ दूसरे चर में उसी अनुपात में ही वृद्धि होती है। उदाहरण के लिए "गर्मी" व "तापमान" में संपूर्ण धनात्मक सहसंबंध है।

दूसरी ओर, यदि एक चर में वृद्धि (x) के साथ-साथ दूसरे चर (y) में उसी अनुपात में कमी आती है तो कहा जाता है सहसंबंध ऋणात्मक है। ऋणात्मक सहसंबंध का विस्तार 0 से -1 तक होता है, तथा निम्नतम सीमा संपूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध दर्शाती है। संपूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध यह दर्शाता है कि किसी एक चर में प्रत्येक इकाई वृद्धि के साथ-साथ दूसरे चर में उसी अनुपात में कमी आती है।

शून्य सहसंबंध का अर्थ है कि दोनों चरों में कोई आपसी सहसंबंध नहीं है, अर्थात एक चर (x) में परिवर्तन का दूसरे चर (y) पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। उदाहरणार्थ, शारीरिक भार व, बुद्धि, जूते की माप व मासिक आय आदि। शून्य सहसंबंध विस्तार –1 से +1 के बीच का बिन्दु हैं।



बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) अपने उत्तरों को इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से मिलाइए।

4. धनात्मक व ऋणात्मक सहसंबंध में अन्तर स्पष्ट करें।

....

....

....

....

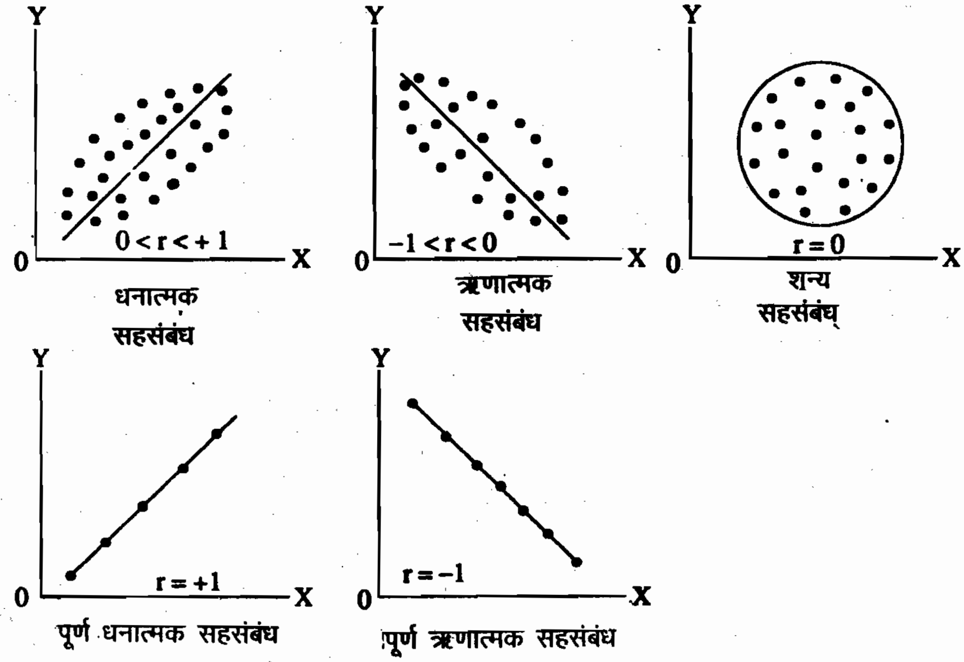
....

....

....

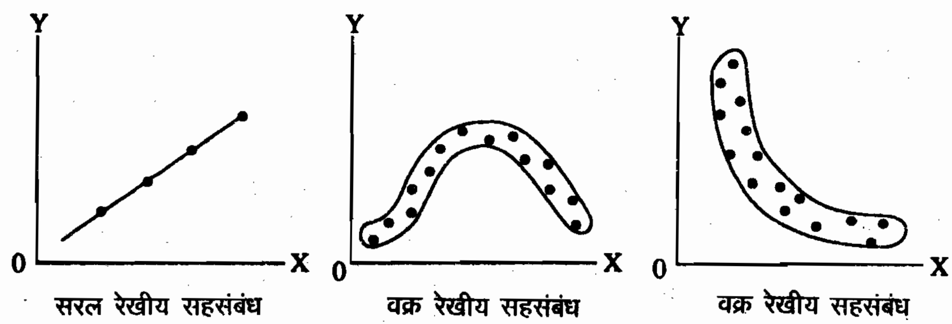
16.6.2 सरल रेखीय व वक्र रेखीय सहसंबंध

सरल रेखीय सहसंबंध दो चरों में एक ही दिशा में या विपरीत दिशा में परिवर्तन या अनुपात है। और एक चर का दूसरे चर के साथ परिवर्तन को आलेखीय विधि द्वारा प्रदर्शन करें तो एक सरल रेखा प्राप्त होती है।



चित्र 6.1: x व y में विभिन्न संबंध दर्शाता हुआ लेखाचित्र

दूसरी परिस्थिति पर विचार कीजिए। पहले, एक चर में वृद्धि के साथ, दूसरे चर में भी उसी अनुपात में किसी बिंदु तक वृद्धि होती है ; उसके बाद पहले चर में वृद्धि के साथ दूसरे चर में कमी आने लगती है। इसके आलेख में वक्र रेखा आती है । दो चरों में ऐसा संबंध वक्ररेखीय सहसंबंध कहलाता है।



चित्र 16.2: सरल रेखीय व वक्र रेखीय सहसंबंधों को दर्शाता हुआ रेखाचित्र

16.7 सहसंबंध गुणाँक की गणना करने की विधियाँ (अवर्गीकृत आंकड़े)

द्विचरीय बंटन के असमूहित आंकड़े के लिए सहसंबंध की गणना करने की निम्न तीन विधियाँ हैं :

1. क्रम-अंतर सहसंबंध गुणाँक या सपीयरमैन का अनुक्रम सहसंबंध गुणाँक विधि
2. पीयरसेन की गुणन-आधूर्ण सहसंबंध विधि
3. प्रकीर्णन आरेख द्वारा पीयरसेन का गुणन-आधूर्ण सहसंबंध गणना करना

16.7.1 क्रम अंतर सहसंबंध गुणाँक

जब दो चरों का मापन क्रमांकों पर आधारित हो तो क्रम अंतर सहसंबंध निम्न सूत्र के अनुसार परिकलित गणित किया गया है

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)}$$

यहाँ पर

ρ का अर्थ स्पीयरमैन का सहसंबंध गुणाँक है

D = दो युग्म क्रमांकों में अंतर है

N = कुल समंकों या व्यक्तियों की संख्यां है।

उदाहरण 1: एक भाषण प्रतियोगिता में 10 छात्रों की योग्यता की जाँच प्रोफेसर मेहरोत्रा और प्रोफेसर शुक्ला ने की। उनका मूल्यांकन क्रमांकों में था जो कि नीचे दिए गए हैं। बतायें कि दोनों विशेषज्ञ किस सीमा तक अपने निर्णयों में सहमत हैं ?

तालिका 16.1

छात्र	प्रो.मेहरोत्रा के क्रमांक (R_1)	प्रो.शुक्ला के क्रमांक (R_2)	अंतर $D = R_1 - R_2$	अंतर D^2
A	1	1	0	–
B	3	2	–1	1
C	4	5	+1	1
D	7	9	+2	4
E	6	6	0	0
F	9	8	–1	1
G	8	10	+2	4
H	10	7	–3	9
I	2	4	+2	4
J	5	3	–2	4
	N=10		$\Sigma D =$ 0	$\Sigma D^2 = 28$

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2 - 1)} \quad = 1 - \frac{6 \times 28}{10(10^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{168}{990} \quad = 1 - .17 = .83$$

$$\rho = +.83$$

सहसंबंध गुणाँक का मान + .83 है । इससे यह ज्ञात होता है कि दोनों निर्णायकों में आपसी गहरी सहमति है।

उदाहरण 2: निम्न आंकड़ों में 5 छात्रों के हिंदी व अंग्रेजी परीक्षणों में क्रमानुसार समंक दिए गए हैं।

तालिका 16.2

छात्र	हिंदी में समंक	अंग्रेजी में समंक	R_1	R_2	R_2–R-1	R^2
A	8	10	2	1	–1	1
B	7	8	3	2	–1	1
C	9	7	1	3	–2	4
D	5	4	4	5	–1	1
E	1	5	5	4	+1	1
	N = 5					$\Sigma D^2 = 8$

$$\rho = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \qquad = 1 - \frac{6\times 8}{5\,(5^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{48}{120} \qquad = 1 - .40 = .60$$

$$\rho = +.60$$

हिंदी व अंग्रेजी के समंकों में सहसंबंध धनात्मक व मध्यस्थ है।

स्पीयमैन के क्रम-अन्तर सहसंबंध गुणाँक की गणना के लिए सोपान :

1. पहले स्तम्भ में छात्र के नाम व क्रमसंख्या की सूची बनाएं।
2. दूसरे व तीसरे स्तम्भ में प्रत्येक छात्र के क्रमशः परीक्षा 1 व 2 के समंक लिखें।
3. दूसरे स्तम्भ के समकों को ध्यान से देखें और सबसे अधिक समंक को जो कि 9 है , के पहला क्रमांक 1 दें , दूसरा क्रम अगले सबसे उच्च समंक को दें। इसी प्रकार तब तक करते जाए जब तक सबसे कम समंक को क्रम N न मिल जाए।
4. तीसरे स्तम्भ के समंकों को ध्यान से देखें और स्तम्भ दो की तरह सबसे उच्च समंक वाले छात्र को प्रथम क्रम दें । इस स्तम्भ में सबसे अधिक समंक 10 हैं अतः उच्चतम क्रम 1 दें। उससे अगले उच्चांक जो इस परीक्षा में 8 हैं , को क्रम 2 C छात्र का क्रम 3 है , D छात्र का क्रम 5 और E वह पर 4 हुआ।
5. प्रत्येक छात्र के दोनों क्रमों का अंतर ज्ञात करें (स्तम्भ 6)।
6. छटे खाने में लिखित अंतर का योगफल निकालें , वह हमेशा ही (0) शून्य होगा।
7. छटे स्तम्भ के प्रत्येक क्रमांक का वर्ग करें और उसे स्तम्भ 7 में लिखें। अंत में कुल जोड़ ΣD^2 निकालें।
8. कुल छात्र संख्या (N) और कुल अंतर जोड़ (ΣD^2) को सूत्र के अनुसार लिखकर क्रम अन्तर सहसंबंध की गणना करें।

उदाहरण 3: निम्न आंकड़ों में 10 छात्रों के एक परीक्षा में दो प्रयत्नों में समंक दिए हैं। दोनों प्रयत्नों के बीच 2 सप्ताह का अन्तर है। क्रम-अन्तर विधि से दोनों प्रयत्नों के समंकों में सहसंबंध की गणना करें।

तालिका 16.3

छात्र क्रमांक/नाम	प्रयत्न 1	प्रयत्न 2	प्रयत्न 1 में क्रम (R_1)	प्रयत्न 2 में क्रम (R_2)	क्रमों का अंतर $(R_1 - R_2)$	क्रमों का अंतर (D)
A	10	16	6.5	5.5	1.0	1.00
B	15	16	3.0	5.5	–2.5	6.25
C	11	24	5.0	1.5	3.5	12.25
D	14	18	4.0	4.0	0	0
E	16	22	2.0	3.0	–1	1.00
F	20	24	1.0	1.5	–0.5	0.25
G	10	14	6.5	7.5	–1.0	1.00
H	8	10	9	10	–1.0	1.00
I	7	12	10	9	1.0	1.00
J	9	14	8	7.5	0.5	0.25
					योग = 0	24.00

$$\rho = 1 - \frac{6\,\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \qquad = \rho = 1 - \frac{6 \times 24}{10(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{144}{990} \qquad = 1 - .145 = .855$$

$$\rho = +.855$$

अतः सहसंबंध = + .855

प्रयत्न 1 और 2 के बीच सहसंबंध धनात्मक व बहुत उच्च हैं।

10 छात्रों द्वारा प्रथम व दूसरे प्रयत्न में समंकों को ध्यानपूर्वक देखिये। क्या आपको 10 छात्रों के प्राप्त समंकों में कोई विशेष गुण दिखाई देता है। शायद आपका उत्तर हाँ में होगा।

तालिका 16.3 के स्तम्भों 2 व 3 में आप देखेंगे कि एक से अधिक छात्रों के बराबर समंक हैं, यानि स्तम्भ दो में छात्र A और G के अंक समान अर्थात 10 हैं। स्तम्भ तीन में छात्र A तथा B और C, F,G तथा J के भी बराबर समंक हैं जो 16, 24 व 14 क्रमशः हैं। तो यह स्वाभाविक है कि उन सबका एक ही क्रमांक होगा, इसे जुड़वें क्रम (Tide Rank) कहा जाता है। पुनरावृत्त समंकों को क्रमांक प्रदान करने का ढ़ंग अपुनरावृत्त समंकों से कुछ भिन्न हैं।

स्तम्भ 4 को देखें। छात्र ए तथा B दोनों के समंक 10 हैं और उनका क्रम समूह 6 व 7 हैं। इन दोनों को 6 व 7 क्रम देने की बजाय इन दोनों क्रमों का की माध्य यानि 6.5 $\left[\frac{(6+7)}{2} = \frac{13}{2}\right]$ दिया गया है।

प्रयत्न दो में भी यही विधि अपनाई गई है। इस अवस्था में जुड़वें पद तीन बार आए हैं। छात्र C और F के समंक समान हैं अतः उन दोनों को 1.5 $\left(\frac{1+2}{2}\right)$ का क्रमांक दिया है। इसी प्रकार A और B का क्रम 5 व 6 है और उन्हें 5.5 $\left(\frac{5+6}{2}\right)$ का क्रमांक दिया। ऐसे ही G और J (7+8) [illegible] दिया गया है। यदि समंक दो से अधिक बार आते हैं तब भी यही

विधि अपनाई जाती है। उदाहरणतया यदि तीन विद्यार्थियों के अंक 10,10,10 हैं , और वे पाँचवें , छठे, सातवें क्रम पर हैं तो प्रत्येक के 6 को $\left(\frac{5+6+8}{2}\right)$ का क्रम दिया जाएगा। शेष सारी विधि सहसंबंध गुणाँक की गणना की वही है जो उदाहरण में दी गई है।

स्पीयमैन द्वारा दी गई क्रम अंतर सहसंबंध गुणाँक की विधि शीघ्र व सरल है! यह विधि सर्वमान्य विधि है यदि आंकड़े क्रमबद्ध रूप में दिए गये हैं और समंक युगम अंक 5 से अधिक तथा 30 से कम, और बीच में जुड़वें पद भी कम हों।

16.7.2 पीयरसेन का गुणन-आधूर्ण सहसंबंध गुणाँक

सबसे अधिक प्रयोग में आने वाला और शुद्ध सहसंबंध गुणाँक पीयरसेन का आधूर्ण गुणनफल सहसंबंध गुणाँक है। इसकी गणना तब की जाती है जब आँकड़े अन्तराल या अनुपात मापनी में अभिव्यक्त किए गए हों और दोनो चरों x व y का संबंध सरलरेखीय हो। यहाँ पर सरलरेखीय संबंध का अर्थ है कि यदि हम x चर को x-अक्ष और y-चर को y अक्ष पर लेकर आलेख बनाए तो एक सरल रेखा प्राप्त होगी।

पीयरसेन सहसंबंध गुणाँक ज्ञात करने का सूत्र निम्न है।

$$r = 1 - \frac{N\Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{\sqrt{\{N\Sigma X^2 - (\Sigma X)^2\}\{N\Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2}}$$

r = जहाँ पीयरसेन का सहसंबंध गुणाँक

Σx = x चर के समंकों का कुल जोड़

Σy = y चर के समंकों का कुल जोड़

(Σx^2) = x समंकों के वर्गों का कुल योग

(Σy^2) = y समंकों के वर्गों का कुल योग

(Σxy) = x तथा y समंकों के युग्मों के गुणनफल का योग

(N) = अंकों के युग्मों की कुल संख्या

उदाहरण 4: नीचे तालिका में दिए गए समंक बुद्धि परीक्षण व गणित परीक्षण में 8वीं कक्षा के 10 छात्रों के हैं। दोनों चरों का सहसंबंध गुणाँक ज्ञात कीजिए।

तालिका 16.4

छात्र	बुद्धि परीक्षण में अंक	गणित में अंक			
	x	y	x^2	y^2	xy
1	24	13	576	169	312
2	20	9	400	81	180
3	18	12	324	144	216
4	17	20	289	400	340
5	15	11	225	121	165
6	12	16	144	256	192
7	10	5	100	25	50
8	8	2	64	4	16
9	6	7	36	49	42
10.	4	1	16	1	4
N=10	$\Sigma x = 134$	$\Sigma y = 96$	$\Sigma x^2 = 2174$	$\Sigma y^2 = 1250$	$\Sigma xy = 1517$

$$\text{सहसंबंध } (r) = \frac{10\,(1517) - (134)\,(96)}{\sqrt{\{10(2174)-(134)^2\}\{10\,(1250)-(96)^2}}$$

$$= \frac{2306}{\sqrt{(3784)\,(3284)}} = \frac{2306}{3525.5}$$

$$= +0.65$$

अवर्गीकृत आँकड़ों से r ज्ञात करने की विधि की प्रक्रिया में निम्न पद है :

पद 1. x व y चरों के समंकों का कुल योग निकालें।

पद 2. x चर के प्रत्येक समंक का वर्ग ज्ञात करके उनका योग करें (स्तम्भ 4) निकालें।

पद 3. y चर के प्रत्येक समंक का वर्ग ज्ञात करके उनका योग करें (स्तम्भ 5)

पद 4. x और y स्तम्भों के प्रत्येक युग्म का गुणनफल ज्ञात करके उसे स्तम्भ 6 में लिखें।

पद 5. N, Σx, Σy, Σx^2, Σy^2 तथा Σxy के मानों को सूत्र में रखकर r की गणना करें।

16.7.3 पीयरसेन का गुणन-आधूर्ण सहसंबंध गुणाँक (जब वर्गीकृत आंकड़े दिए गए हों)

जब व्यक्तियों की संख्या (N) अधिक हो और संख्या बहुत अधिक न भी हो, और जब गणना मशीन से न करके हाथ से करनी हो तो आमतौर पर x व y के आंकड़ों को वर्गीकृत कर लिया जाता है और एक प्रकीर्णन चित्र या सहसंबंध चित्र बना लिया जाता है।

उदाहरण 5: निम्नलिखित समंकों एक शैक्षिक मूल्यांकन की कक्षा के छात्रों द्वारा दो वस्तुनिष्ठ परीक्षणों में प्राप्त किए। इनमें सहसंबंध ज्ञात करो। x चर का वर्ग अंतराल 10 तथा y चर का 5 लें।

विषय परीक्षा 1	विषय परीक्षा 2
150	60
126	40
135	45
176	50
138	56
142	43
151	57
163	38
137	41
178	55
139	41
155	43
147	37
162	58
156	48
146	39
133	31
168	46
153	52
150	57

ऐसी समस्याओं को दो चरणों में हल किया जाता है। पहले चरण में द्विचरीय बारंबारता बंटन की तालिका बनाई जाती है। दूसरे भाग में इस तालिका की सहायता से सहसंबंध की गणना की जाती है।

पहला चरण : आंकड़ों का दोहरा वर्गीकरण के लिए पंक्तियों और स्तम्भों वाली एक तालिका बनाई जाती है। स्तम्भों में प्रत्येक x अन्तराल के लिए y बंटन लिखा जाता है तथा पंक्तियों में प्रत्येक y अन्तराल के लिए x बंटन की बारंबारताएं लिखी जाती है। तालिका की सबसे ऊपर वाली पंक्ति में x चर के वर्ग अंतराल लिखे जाते हैं तथा सबसे पहले स्तम्भ में y चर के वर्ग अंतराल होते हैं। प्रत्येक व्यक्ति के x तथा y समंक के लिए मिलान बनाई जाती है। उदाहरणतया, दी गई समस्या में, एक व्यक्ति के उपलब्धि परीक्षण (x) में 150 अंक हैं, और दूसरे परीक्षण (y) में 60 हैं। हम उसके लिए x चर के वर्ग अंतराल 145 -154 में परीक्षण 1 के लिए और y चर के 60-64 वर्ग अंतराल में परीक्षण 2 के लिए मिलान चिन्ह (Tallies) लगाते हैं। इसी तरह शेष व्यक्तियों के लिए भी उपयुक्त स्थान मिलान चिन्ह लगाए गए हैं।

तालिका 16.5

प्रथम उपलब्धि परीक्षण में X समंक

द्वितीय उपलब्धि परीक्षण में Y समंक

x→ / y↓	125-134	135-144	145-154	155-164	165-174	175-184	योग fy
64-69							0
60-64		1	1 1				1
55-59		1 1	11 2	1 1		1 1	5
50-54			1 1			1 1	2
45-49		1 1		11 2	1 1		4
40-44	1 1	111 3					4
35-39		11 2	11 2	1 1			3
30-34	1 1						1
योग fx	2	5	6	4	1	2	20

जब मिलान चिन्ह लगाने का कार्य संपूर्ण हो जाता हैं तब हम प्रत्येक खाने की बारम्बारता लिखते हैं। उसके बाद हम प्रत्येक पंक्ति व स्तम्भ के खानों की बारंबारताओं का योगफल निकालते हैं और उसे अंतिम स्तम्भ में Σfy के नीचे लिखते हैं। जब यह खाना भर जाता है, तब हमारे पास y चर का सम्पूर्ण बारम्बारता बंटन आ जाता हैं। इसी प्रकार हम सभी स्तम्भों की बारंबारताओं का योग करके सबसे नीचे वाली पंक्ति fx में लिखते हैं। जब यह कार्य पूरा हो जाता है तब x चर का पूरा बारंबारता बंटन इस पंक्ति में आ जाता है। अन्तिम (fy) स्तम्भ तथा सबसे नीचे की पंक्ति के सभी खानों की बारंबारता का योग करके हम देख सकते हैं कि दोनों योगफल समान तथा N के बराबर होंगे।

दूसरा चरण : गुणन-आधूर्ण 'r' इस द्विचरीय बंटन से निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$r = \frac{N \Sigma fx' fy' - (\Sigma fx')(\Sigma fy')}{\sqrt{\{N\Sigma fx'^2 - (\Sigma x')^2\}\{N\Sigma fy'^2 - (\Sigma fy')^2}}$$

इस सूत्र को प्रयोग करने में निम्न सोपानो का अनुसरण करना पड़ता है :

सोपान 1 प्राप्त दोनों चरों के समंकों का द्विचरीय बंटन तैयार करो जैसे कि तालिका 16.6 में दिखाया गया है।

सोपान 2 x और y के बारंबारता-बंटनों से दोनों चरों के अनुमानित माध्य में x और y मानों का अंतर ज्ञात करो। यहाँ पर y चर के वर्ग अंतराल 45.49 का मध्य बिन्दु इस बंटन के लिए अनुमानित माध्य है। इसी प्रकार x चर के वर्ग अंतराल 145-154 का मध्य बिंदु x चर का अनुमानित माध्य है। स्तम्भ 9 और पंक्ति 10 देखें।

सोपान 3 संख्याओं fy' और fx' का आपसी गुणनफल आमने-सामने वाली बारंबारताओं के गुणनफल से निकालें। खाना 10 व पंक्ति 11 देखें।

सोपान 4 संख्याओं fy' और fx' के वर्ग निकालें और उनके गुणनफल प्राप्त करें। स्तम्भ 11-12 देखें।

सोपान 5 स्तम्भ 12 तथा पंक्ति 13 में जाँचने के लिए fy' तथा fx' को दोहराया गया है। इसके लिए प्रत्येक खाने के बारंबारता को संगत विचलन समंकों से गुणा किया गया है।

सोपान 6 पंक्ति 14 और स्तम्भ 13 को भरने के लिए अर्थात fx' तथा fy' का गुणनफल ज्ञात करने के लिये प्रत्येक खाने के विचलन के गुणनफल को वर्ग अंतराल बारंबारता से गुणा किया गया है।

सोपान 7 पंक्ति व स्तम्भ वार प्रत्येक खाने के गुणनफल fx'y' ज्ञात करे और अन्तिम पंक्ति व स्तम्भ में लिखें।

सोपान 8 अंतिम खाने व पंक्ति का योगफल निकालें और दोनों का मिलान करें। ये दोनों समान होंगे। यदि ऐसा नहीं है तो फिर गणना करे।

सोपान 9 सभी मूल्य निकालने के बाद इन्हें सूत्र में रखकर सहसंबंध निकालें।

अतः दिए गए प्रकीर्णन चित्र में

$$r = \frac{N \Sigma fx' fy' - (\Sigma fx')(\Sigma fy')}{\sqrt{\{N\Sigma fx'^2 - (N\Sigma x')^2\}\{N\Sigma fy'^2 - (\Sigma fy')^2}}$$

$$r = \frac{20 \times 2 - (2)(3)}{\sqrt{\{20 \times 39 - (3)^2\}\{20 \times 57 - (2)^2}}$$

$$r = \frac{40 - 6}{\sqrt{(780 - 9)(1140 - 4)}}$$

$$r = \frac{34}{\sqrt{771 \times 1136}}$$

$$r = \frac{34}{27.767 \times 33.70} = \frac{34}{935.8756}$$

$r = +.036$

तालिका 16.6: बारंबारता बंटन से एक द्विचरीय 'r' का अभिकलन

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}
R_1	x→ / y↓	125-134	135-144	145-154	155-164	165-174	175-184	योग fy	y'	fyy'	fyy'²	fx'	fx'fy'
R_2	60-64			${}_{0}1^{0}$				1	+3	+3	12	0	0
R_3	55-59		${}_{-2}2^{-2}$	${}_{0}2^{0}$	${}_{2}1^{2}$		${}_{6}1^{6}$	5	+2	+10	20	+3	+6
R_4	50-54			1			${}_{+3}1^{+3}$	2	+1	+2	2	+3	+3
R_5	45-49		${}_{0}1^{0}$		${}_{0}2^{0}$	${}_{0}1^{0}$		4	0	0	0	+3	0
R_6	40-44	${}_{-2}1^{-2}$	${}_{+3}3^{+3}$					4	–1	–4	4	-5	+1
R_7	35-39			${}_{0}2^{0}$	${}_{-2}1^{-2}$			3	–2	–6	10	+1	–2
R_8	30-34	${}_{-6}1^{-6}$						1	–3	–3	9	–2	–6
R_9	योग fx	2	5	6	4	1	2	20		$\Sigma fy' = +2$	$\Sigma fy'^2 = 57$	$\Sigma fx' = +3$	$\Sigma fx'fy' = +2$
R_{10}	x'	–2	–1	0	+1	+2	+3						
R_{11}	$f_x x'$	–4	–5	0	+4	+2	+6	$\Sigma fx' = +3$					
R_{12}	$f_x x'^2$	8	5	0	4	4	18	$\Sigma fx'^2 = 39$					
R_{13}	fy'	–4	–1	+4	0	0	+3	$\Sigma fy' = +2$					
R_{14}	fx'fy'	–8	+1	0	0	0	+9	$\Sigma fx'fy' = +2$					

16.8 सहसंबंध गुणांक की व्याख्या

सहसंबंध गणना का तब तक कोई महत्त्व नहीं है जब तक हमें यह नहीं पता चलता कि सहसंबंध गुणाँक का मूल्य कितना हो कि उसे महत्त्वपूर्ण माना जाए और वह सहसंबंध गुणाँक हमें आंकड़ों के बारे में क्या बताता है ? सहसंबंध गुणाँक के प्राप्त मूल्य का क्या तात्पर्य है ?

इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए प्रायः सहसंबंध गुणाँक की शाब्दिक व्याख्या की जाती है। सहसंबंध की मात्रा की व्याख्या करने की व्यावहारिक विधि नीचे दी गई है :

सहसंबंध गुणाक का मूल्य	व्याख्या
1. ± 1	पूर्ण धनात्मक/ऋणात्मक सहसंबंध
2. ± 90 से ± 99	बहुत उच्च धनात्मक/ ऋणात्मक सहसंबंध
3. ± .70 से ± .90	उच्च धनात्मक/ ऋणात्मक सहसंबंध
4. ± .50 से ± .70	मध्यस्थ धनात्मक/ऋणात्मक सहसंबंध
5. ± .30 से ± .50	निम्न धनात्मक/ ऋणात्मक सहसंबंध
6. ± .10 से ± .30	बहुत निम्न धनात्मक/ ऋणात्मक सहसंबंध
7. ± 00 से ± .10	अत्यधिक निम्न व नगन्य धनात्मक/ ऋणात्मक सहसंबंध

16.9 सहसंबंध गुणांक की अनुचित व्याख्या

कभी कभी हम सहसंबंध की व्याख्या अनुचित करते हुए कारण-कार्य प्रभाव संबंध निश्चित कर लेते हैं। हम कह सकते हैं कि एक चर में बढ़ोतरी का कारण दूसरे में परिवर्तन है। वास्तव में हम ऐसे व्याख्या तब तक नहीं कर सकते जब तक हमारे पास ठोस तर्कसंगत आधार न हो। सहसंबंध गुणाँक हमें दो चरों के बीच परिमाणात्मक संबंध के परिमाण के बारे में सूचना प्रदान करता है , न कि दोनों के बीच संबंध की प्रकृति के बारे में।

कारणत्व एक निश्चित क्रम इंगित करता है - A हमेशा B का कारण है , जबकि सहसंबंध केवल दो चरों में परस्पर साहचर्य का परिचायक है। उदाहरणतया, कुसमायोजन व चिन्ता में उच्च सहसंबंध हो सकता है। किन्तु इस उच्च सहसंबंध के आधार पर हम यह नही कह सकते कि कुसमायोजन चिन्ता का कारण है। यह भी सम्भव हो सकता है कि अधिक चिन्ता से कुसमायोजन होता हो। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि कुसमायोजन व चिंता में आपस में गहरा संबंध है। एक और उदाहरण लीजिए। विद्यालय के बच्चों में एक विषय में अभिक्षमता का उस विषय उपलब्धि से गहरा संबंध है। क्या विद्यालयी परीक्षा के अन्त में इससे कारणवाची संबंध की झलक मिलती है ? यह आवश्यक नहीं है। विषय में अभिक्षमता उस विषय की निष्पत्ति में विचरण अवस्था पैदा करती है लेकिन यह उपलब्धि का एक मात्र कारण नही है। उच्च उपलब्धि के और भी बहुत से कारण हो सकते हैं।

अतः सहसंबंध गुणाँक की व्याख्या करते समय कारण-प्रभाव सम्बन्ध निश्चित करते समय दोनों चरों के सहसंबंध के बारे में तर्कसंगत आधार भी देखने और तभी निश्चित निष्कर्ष निकालने चाहिए।

बोध प्रश्न

टिप्पणी : क) अपने उत्तर के लिए नीचे दिए गए रिक्त स्थान का प्रयोग कीजिए।

ख) अपने उत्तरों को इस इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों से मिलाइए।

5. राम ने कक्षा IX के छात्रों के जूतों की माप व बुद्धि में 0.45 सहसंबंध गुणाँक पाया। परिणाम की व्याख्या करें। क्या यह कहना उपयुक्त है कि पैर के माप के साथ छात्र की बुद्धि में मध्यस्थ बढ़ोतरी होती है ? अपने उत्तर का सत्यापन करें।

....

....

....

....

16.10 सहसंबंध गुणाँक की मात्रा को प्रभावित करने वाले कारक

सहसंबंध गुणाँक के मूल्य को प्रभावित करने वाले कारकों के बारे में भी छात्रों को आवश्यक है अन्यथा ये कारक व्याख्या को दोषपूर्ण बना देते हैं।

1. सहसंबंध गुणाँक का परिमाण मापे गए दोनों चरों के मानों पर बहुत निर्भर है। इन चरों का विचरण जितना अधिक होगा, सहसंबंध भी उतना अधिक होगा।

2. सहसंबंध गुणांक के मूल्य में परिवर्तन आ जाता है यदि शोधकर्त्ता अंत्य समूहों से सूचनाएं प्राप्त करके दोनों चरों की माप प्राप्त करता है। ऐसी स्थित में सहसंबंध का मूल्य सही मूल्य या अक्समात प्रतिदर्श से प्राप्त मूल्य से अधिक हो जाता है।

3. यदि समूह के समंकों में से अंत्य समंक निकाल या मिला दिए जाए तो r का मान बदल जाता है। अंत्य मान मिला देने पर सहसंबंध गुणाँक बढ़ सकता है और निकाल देने पर कम हो सकता है।

16.11 शैक्षिक मापन व मूल्यांकन में सहसंबंध की उपयोगिता तथा महत्त्व

सहसंबंध, शैक्षिक मापन व मूल्यांकन में सबसे उपयोगी विश्लेषणात्मक विधियों में से एक है। यह न केवल व्यक्ति के दो गुणों में संबंध दर्शाया है अपितु इसके निम्न उपयोगी भी है :

1. किसी एक चर अर्थात आश्रित चर का भविष्यकथन, किसी दूसरे चर (स्वतन्त्र चर) के आधार पर करना।

2. किसी प्रश्नपत्र व परीक्षण की वैद्यता व विश्वसनीयता ज्ञात करने में सहायक होता है।

3. किसी एक योग्यता में अन्य सहसंबंधित कारकों की भूमिका ज्ञात करने में सहायक होता है।

4. कारक विश्लेषण द्वारा मानवीय योग्यताओं में योगदान देने वाली विभिन्न चर राशियों के बारे में जानकारी देना।

16.12 सारांश

चरों के समंकों, युग्मों के परस्पर संबंध का परिमाणात्मक मापन सहसंबंध गुणाँक गुणनफल द्वारा किया जाता है। सहसंबंध गुणाँक का मान -1.0 से +1.0 के बीच होता है। यह बात ध्यान रखने योग्य है कि उच्च सहसंबंध गुणाँक कारण प्रभाव संबंध नहीं बताता और केवल उस संबंध को मापता है जो तर्कसंगत व उचित आधार पर हों।

सहसंबंध गुणांक मूल्य दोनों चरों समांगता से प्रभावित होता है। यदि दो चरों के बीच रेखिक सहसंबंध है तो आँकड़े जितने विसमांग और मापों का परास जितना अधिक होगा, सहसंबंध का मान उतना ही अधिक होगा। शैक्षिक मूल्यांकन, परीक्षण मानकीकरण व संभावित भविष्य कथन करने में सहसंबंध बहुत उपयोगी होता है।

16.13 अभ्यास कार्य

1. विद्यालय में पढ़ाए जाने वाले विभिन्न विषयों के जोड़े बनाकर उनमें सहसंबंध गुणाँक ज्ञात करो। इस सहसंबंध की उपयोगिता की चर्चा कीजिए।
2. किसी विद्यालय की छमाही और वार्षिक परीक्षा के, 10वीं कक्षा के छात्रों के समंक प्राप्त करें और उनमें सहसंबंध ज्ञात करें।
3. कोई द्विचरीय बंटन लें और उसमें प्रत्येक समंक में. (अ) 10 जोड़ें (ब) 10 घटाएं (स) 10 से गुणा करें (द) 10 से भाग दें। इस प्रकार प्राप्त समंकों के युग्मों का सहसंबंध ज्ञात करे और इस सहसंबंध की मौलिक सहसंबंध से तुलना करें।
4. पाँच व्यक्तियों की संगीत योग्यता के बारे में दो निर्णायकों का निर्णय लिया गया। इन दो निर्णायकों के निर्णयों की स्पीयरमैन सहसंबंध गुणांक की सहायता से सहमति का परीक्षण करें।

व्यक्ति	A	B	C	D	E
निर्णायक -1	2	3	5	4	1
निर्णायक-2	1	5	4	3	2

5. निम्न युग्म समंकों के लिए क्रम-अन्तर विधि से सहसंबंध की गणना करें।

व्यक्ति	क	ख	ग	च	छ	ज	प	फ
गणित में अंक	13	18	15	10	16	12	14	18
भौतिक विज्ञान अंक	26	22	24	21	22	29	25	23

6. निम्न 10 छात्रों के समंकों में क्रम-अंतर से सहसंबंध का मान ज्ञात करो।

छात्र	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
संस्कृत में समंक	15	17	21	23	13	17	19	23	25	30
हिंदी में समंक	26	25	24	20	22	23	30	25	21	19

7. नीचे दिए गए समकों के दो समुच्चयों में पीयरसन विधि से सहसंबंध निकालें।

x	15	18	22	17	19	20	16	21
y	40	42	50	45	43	46	41	41

16.14 चर्चा के बिंदु

1. समकों की वितरण समांगता व विसमांगता सहसंबंध को क्यों प्रभावित करती है ?
2. सहसंबंध का मान + 1 से –1 तक ही क्यों होता है ?

16.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. दो चरों के विचरण के संबंध को सहसंबंध कहते हैं।
2. सहसंबंध गुणाँक एक संख्या है जो यह दर्शाती है कि किस सीमा तक एक गुण में परिवर्तन दूसरे गुण में परिवर्तन को प्रभावित होता है।
3. सहसंबंध गुणाँक मूल्य + 1.00 से –1.00 के बीच होता है।
4. यदि दो चरों में इस प्रकार का संबंध हो कि एक में वृद्धि या कमी होने पर दूसरे में भी बढ़ोतरी वृद्धि या कमी हो तो उसे पूर्ण धनात्मक सहसंबंध कहते हैं इसके बिल्कुल उल्टा होने पर पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध होता है।
5. बुद्धि व जूता माप में .45 सहसंबंध मूल्य निम्न धनात्मक सहसंबंध का द्योतक है। लेकिन इस संबंध का तर्कपूर्ण आधार नहीं है। अतः यह कारक प्रभाव संबंध की ओर इंगित नहीं करता।

16.16 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Aggarwal, Y.P. (1990): '*Statistical Methods - Concepts, Applications and Computation*', Sterling Publishers Pvt. Ltd., New Delhi.

Ferguson, G.A. (1974): '*Statistical Analysis in Psychology and Education*', McGraw Hill Book Co., New York.

Garrett, H.E. & Woodworth, R.S. (1969): '*Statistics in Psychology and Education*', Vakils, Feffer & Simons Pvt. Ltd., Bombay.

Guilford, J.P. & Benjamin, F. (1973): '*Fundamental Statistics in Psychology and Education*', McGraw Hill Book Co., New York.